# 9. Übungsblatt zur Vorlesung Finanzmathematik II

**1.Aufgabe:** Der Ornstein-Uhlenbeck-Prozess oder auch OU-Prozess $\nu_1$, der Cox-Ingersoll-Ross-Prozess oder auch CIR-Prozess (oder auch square root oder SQR-Prozess in der ökonometrischen Literatur) $\nu_2$ und der GARCH-Diffusion-Prozess $\nu_3$ sind gegeben durch die folgenden stochastischen Differentialgleichungen:

$$
\begin{aligned}
d\nu_{1,t} &= \kappa_1(\bar{\nu}_1 - \nu_{1,t})\,dt \;+\; \beta_1\,dx_t && (1)\\
d\nu_{2,t} &= \kappa_2(\bar{\nu}_2 - \nu_{2,t})\,dt \;+\; \beta_2\,\sqrt{\nu_{2,t}}\,dx_t && (2)\\
d\nu_{3,t} &= \kappa_3(\bar{\nu}_3 - \nu_{3,t})\,dt \;+\; \beta_3\,\nu_{3,t}\,dx_t && (3)
\end{aligned}
$$

mit Modell-Parametern $\kappa_i, \bar{\nu}_i$ und $\beta_i$ und $x_t$ eine Brownsche Bewegung. Simulieren Sie die Prozesse $\nu_{1,t}, \nu_{2,t}$ und $\nu_{3,t}$ mit Hilfe einer Excel-Simulation. Wählen Sie dazu etwa folgende Parameter-Werte:

$$
\begin{aligned}
\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa_3 &= 3 && (4)\\
\bar{\nu}_1 = \bar{\nu}_2 = \bar{\nu}_3 &= 4\% && (5)
\end{aligned}
$$

und:

$$
\begin{aligned}
\beta_3 &= 2\\
\beta_2 := \beta_3\sqrt{\bar{\nu}} &= 0.4 && (6)\\
\beta_1 := \beta_3\bar{\nu} &= 8\%
\end{aligned}
$$

mit den Start-Werten $\nu_{i,t=0} = \bar{\nu} = 4\%$. Variieren Sie dann insbesondere für den CIR-Prozess das $\beta_2$ und schauen Sie sich die Pfade für die beiden Fälle

$$\kappa_2\bar{\nu}_2 \;>\; \beta_2^2/2 \qquad \text{und} \qquad \kappa_2\bar{\nu}_2 \;<\; \beta_2^2/2 \tag{7}$$

an.

**2.Aufgabe:** Das Heston-Modell ist gegeben durch die Preis-Dynamik

$$dS_t/S_t \;=\; \mu_t\,dt \;+\; \sigma_t\,dx_t \tag{8}$$

mit einer stochastischen instantanen Varianz $\nu_t := \sigma_t^2$, die durch einen CIR-Prozess gegeben ist,

$$d\nu_t \;=\; \kappa(\bar{\nu} - \nu_t)\,dt \;+\; \beta\,\sqrt{\nu_t}\,dy_t \tag{9}$$

mit einer Brownschen Bewegung $y_t$, die typischerweise stark negativ korreliert ist zu der Brownschen Bewegung $x_t$ aus (8),

$$dx_t \cdot dy_t \;=\; \rho\, dt \tag{10}$$

mit einem Korrelationsparameter $\rho \in (-1, 1)$. Leiten Sie die SDE für die instantane Volatilität $\sigma_t = \sqrt{\nu_t}$ her. Das heisst, mit Hilfe des Ito-Lemmas, bestimmen Sie Funktionen $a = a(\sigma_t, t)$ und $b = b(\sigma_t, t)$, so dass

$$d\sigma_t \;=\; a(\sigma_t, t)\, dt \,+\, b(\sigma_t, t)\, dy_t \tag{11}$$

gilt. Sie benötigen dazu nur die Gleichung (9). Insbesondere die Gleichung (10), korrelierte Brownsche Bewegungen haben wir noch nicht behandelt, können Sie ignorieren.