Hochschule RheinMain — SS 2022

Prof. Dr. D. Lehmann

8. Übungsblatt zur Vorlesung
Finanzmathematik II

1.Aufgabe: Eine instantane Volatilität sei durch die folgende stückweise konstante Funktion definiert:

$$\sigma_t \;:=\; \begin{cases} 30\% & \text{fuer } t \in [\,0\,,\,0.5\,] \\ 25\% & \text{fuer } t \in (\,0.5\,,\,1\,] \\ 20\% & \text{fuer } t \in (\,1\,,\,2\,] \end{cases}$$

Berechnen Sie den Erwartungswert (x_t ist eine Brownsche Bewegung)

$$\mathsf{E}_W\left[\, e^{\int_0^T \sigma_t\, dx_t} \,\right]$$

bezüglich des Standard-Wienermaßes. Benutzen Sie dazu das Theorem 13.5 aus der Vorlesung.

2.Aufgabe: Ein Underlying S_t wurde an das zeitabhängige Black-Scholes Modell kalibriert und es wurden folgende instantane Volatilitäten gefunden (die Zeiten sind in Jahren angegeben):

$$\sigma_t \;=\; \begin{cases} 30\% & \text{fuer } t \in [0, 0.5] \\ 25\% & \text{fuer } t \in (0.5, 1] \\ 20\% & \text{fuer } t \in (1, 2] \end{cases}$$

Der jährliche Zinssatz r betrage $r = 3\%$ und der aktuelle Preis des Underlyings sei $S_0 = 100$.

a) Berechnen Sie den Preis des Standard Calls mit Payoff

$$H(S_T) \;=\; \max\{S_T - 90, 0\}$$

mit Laufzeit $T = 2$ Jahren im zeitabhängigen Black-Scholes Modell.

b) Berechnen Sie den Preis des 'performance-type' Puts mit Auszahlungsfunktion

$$H(S_T) \;=\; \max\{80\% - S_T/S_0, 0\}$$

mit Laufzeit $T = 2$ Jahren im zeitabhängigen Black-Scholes Modell.

..bitte wenden

3.Aufgabe: Für einen Standard At The Money Call mit Laufzeiten T_i werden am Markt folgende implizite Volatilitäten beobachtet:

Laufzeit in Jahren:	0.25	0.5	1	2
implizite Volatilität:	25%	21%	19%	20%

Kalibrieren Sie ein zeitabhängiges Black-Scholes Modell derart, so dass dieses die am Markt beobachteten impliziten Volatilitäten aus der obigen Tabelle reproduziert. Wählen Sie dazu eine stückweise konstante Funktion $t \to \sigma_t$ für die instantane Volatilität im BSTD Modell.