Hochschule RheinMain
Prof. Dr. D. Lehmann SS 2022

6. Übungsblatt zur Vorlesung Finanzmathematik II

1.Aufgabe: Wir betrachten eine All-Time-High Option mit Payoff

$$H_{\mathrm{ATH}}\big(\{S_t\}_{0\leq t\leq T}\big) \;:=\; \max_{0\leq t\leq T} S_t$$

im Black-Scholes Modell. In der Vorlesung wurde die folgende Pricing-Formel für den Zeit-t-Preis V_t hergeleitet:

$$V_t \;=\; e^{-r\tau}\bigg\{M_t\,N(d_1) \;+\; e^{r\tau}\,S_t\,N(d_{0,+}) \;+\; \tfrac{1}{\kappa}\Big[e^{r\tau}\,S_t\,N(d_{0,+}) \;-\; S_t^{1-\kappa}\,M_t^{\kappa}\,N(d_{0,-})\Big]\bigg\} \qquad (1)$$

Dabei ist $M_t := \max_{0\leq s\leq t} S_s$ das aktuelle, bis zur Zeit t realisierte Maximum, $\tau = T-t$ ist die Restlaufzeit, $\kappa = \frac{2r}{\sigma^2}$ und die d's sind wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} d_1 &:= \frac{\log\Big[\frac{M_t}{S_t}\Big]+(\frac{\sigma^2}{2}-r)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} \\ d_{0,\pm} &:= \frac{\log\Big[\frac{S_t}{M_t}\Big]+\frac{\sigma^2}{2}\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} \;\pm\; \frac{r}{\sigma}\sqrt{\tau} \end{aligned}$$

Weiterhin wurde gezeigt, dass sich die Formel (1) im Limes Zinsen $r\to 0$ auf die folgende Formel (2) reduziert:

$$V_t \;=\; M_t\,N(d) \;+\; S_t\bigg\{\,N(d_0)\Big(1+\frac{\sigma^2\tau}{2}-\log\big[\tfrac{M_t}{S_t}\big]\Big) \;+\; N'(d_0)\,\sigma\sqrt{\tau}\,\bigg\} \qquad (2)$$

mit den folgenden d's:

$$\begin{aligned} d \;:=\; \lim_{r\to 0} d_1 &\;=\; \frac{\log[\frac{M_t}{S_t}]+\frac{\sigma^2}{2}\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\,, \\ d_0 \;:=\; \lim_{r\to 0} d_{0,\pm} &\;=\; \frac{\log[\frac{S_t}{M_t}]+\frac{\sigma^2}{2}\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\,. \end{aligned}$$

Öffnen Sie ein Excel-Sheet und betrachten Sie die folgenden Punkte:

a) Implementieren Sie die Formeln (1) und (2) in VBA, so dass sie dann als benutzerdefinierte Funktionen auf dem Excel-Sheet verwendet werden können.

b) Überprüfen Sie numerisch, dass die Formel (2) tatsächlich der $r\to 0$ Limes der Formel (1) ist.

c) Plotten Sie den Zeit-0-Preis V_0 als Funktion von $\sigma\in[0\%,100\%]$. Wählen Sie dazu etwa die folgenden Parameterwerte: $S_0=100$, $T=4$ und $r=0$.