

4. Übungsblatt zur Vorlesung Finanzmathematik II

1. Aufgabe: Es sei $\{x_t\}_{t \geq 0}$ eine Brownsche Bewegung und $a > 0$ sei eine positive reelle Zahl. Für den Level a definieren wir eine Stopzeit τ_a , auch ‘first hitting time’ genannt, durch

$$\tau_a(\{x_t\}_{t \geq 0}) := \inf\{t \geq 0 \mid x_t = a\}$$

Beweisen Sie:

$$\mathbb{P}[\tau_a \in (t, t + dt)] = \frac{a}{\sqrt{2\pi} t^{3/2}} e^{-\frac{a^2}{2t}} dt \quad (1)$$

Dazu können Sie die Formel (12) aus dem Teil (a) des Theorems 3.5 von heute, das ist das week4b.pdf, benutzen, das war die folgende Aussage:

$$\mathbb{P}\left[\max_{s \in [0, t]} x_s \geq a\right] = 2\mathbb{P}[x_t \geq a].$$

Überlegen Sie sich zunächst, wie Sie die Menge $\{\tau_a \in (t, t + dt)\}$ durch Mengen der Form $\{\max_{s \in [0, \tilde{t}]} x_s \geq a\}$ ausdrücken können, für geeignete \tilde{t} . Überlegen Sie sich dann, durch welchen analytischen Ausdruck die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}[x_t \geq a]$ gegeben ist. Damit können Sie dann die Formel (1) beweisen.

2. Aufgabe: Es sei $\{x_t\}_{t \geq 0}$ eine Brownsche Bewegung. Berechnen Sie folgende Wahrscheinlichkeiten mit Hilfe des Standard-Theorems 4.1 aus der FM1 zur Berechnung von Wiener-Erwartungswerten oder mit Hilfe des Theorems 3.5 aus der Vorlesung von heute, aus dem week4b.pdf:

- a) $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}[x_t \leq a]$ für $a \in \mathbb{R}$.
- b) $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}[x_t \leq \sigma\sqrt{t}]$ für $\sigma \in \mathbb{R}$.
- c) $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}[x_t \leq ct]$ für $c \in \mathbb{R}$.
- d) $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left[\max_{s \in [0, t]} x_s \leq a\right]$ für $a > 0$.
- e) $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left[\max_{s \in [0, t]} x_s \leq \sigma\sqrt{t}\right]$ für $\sigma > 0$.
- f) $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left[\max_{s \in [0, t]} x_s \leq ct\right]$ für $c > 0$.