Hochschule RheinMain SS 2022
Prof. Dr. D. Lehmann

10. Übungsblatt zur Vorlesung
Finanzmathematik II

1.Aufgabe: Der Ornstein-Uhlenbeck-Prozess oder auch OU-Prozess ν_1, der Cox-Ingersoll-Ross-Prozess oder auch CIR-Prozess ν_2 und der GARCH-Diffusion-Prozess ν_3 sind gegeben durch die stochastischen Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} d\nu_{1,t} &= \kappa_1(\bar{\nu}_1 - \nu_{1,t})\,dt \;+\; \beta_1\,dx_t \\ d\nu_{2,t} &= \kappa_2(\bar{\nu}_2 - \nu_{2,t})\,dt \;+\; \beta_2\,\sqrt{\nu_{2,t}}\,dx_t \\ d\nu_{3,t} &= \kappa_3(\bar{\nu}_3 - \nu_{3,t})\,dt \;+\; \beta_3\,\nu_{3,t}\,dx_t \end{aligned}$$

oder etwas kompakter

$$d\nu_t \;=\; \kappa(\bar{\nu} - \nu_t)\,dt \;+\; \beta\,\nu_t^{\gamma}\,dx_t \tag{1}$$

mit $\gamma \in \{0, 1/2, 1\}$. Es sei $E(t) := \mathsf{E}[\nu_t]$ der Erwartungswert von ν_t. Zeigen Sie:

a) $E(t)$ erfüllt die Differentialgleichung

$$E'(t) \;=\; \kappa\big(\bar{\nu} - E(t)\big)$$

b) Folgern Sie aus (a): Für den OU-, CIR- und GD-Prozess gilt:

$$E(t) \;=\; \bar{\nu} + (\nu_0 - \bar{\nu})\,e^{-\kappa t}\,. \tag{2}$$

2.Aufgabe: Für $\gamma \in \{0, 1/2, 1\}$ sei ν_t wie in Aufgabe 1 gegeben durch die Gleichung (1),

$$d\nu_t \;=\; \kappa(\bar{\nu} - \nu_t)\,dt \;+\; \beta\,\nu_t^{\gamma}\,dx_t$$

und $E(t) = \mathsf{E}[\nu_t]$ sei der Erwartungswert von ν_t gegeben durch die Formel (2) aus Aufgabe 1. Definieren wir

$$F(t) \;:=\; \mathsf{E}[\,\nu_t^2\,]\,,$$

dann ist die Varianz von ν_t gegeben durch

$$\mathsf{V}[\nu_t] \;=\; F(t) - E(t)^2\,.$$

a) Zeigen Sie, dass ν_t^2 folgende SDE erfüllt:

$$d(\nu_t^2) \;=\; \big[2\kappa(\bar{\nu}\,\nu_t - \nu_t^2) + \beta^2\nu_t^{2\gamma}\big]dt \;+\; 2\beta\,\nu_t^{\gamma+1}\,dx_t \tag{3}$$

b) Folgern Sie mit Hilfe von (3): $F(t)$ erfüllt die folgenden Differentialgleichungen:

$$\begin{array}{rrcl} \gamma = 0: & F'(t) + 2\kappa F(t) & = & 2\kappa\bar{\nu}\,E(t) + \beta^2 \\ \gamma = 1/2: & F'(t) + 2\kappa F(t) & = & (2\kappa\bar{\nu} + \beta^2)\,E(t) \\ \gamma = 1: & F'(t) + (2\kappa - \beta^2)\,F(t) & = & 2\kappa\bar{\nu}\,E(t) \end{array}$$

c) Die DGLs aus (b) lassen sich alle in geschlossener Form lösen. Wir betrachten lediglich den Limes $t \to \infty$. Zeigen Sie:

$$\gamma = 0: \qquad \lim_{t\to\infty} \mathsf{V}[\nu_t] = \frac{\beta^2}{2\kappa}$$

$$\gamma = 1/2: \qquad \lim_{t\to\infty} \mathsf{V}[\nu_t] = \frac{(\beta\sqrt{\bar{\nu}})^2}{2\kappa}$$

$$\gamma = 1: \qquad \lim_{t\to\infty} \mathsf{V}[\nu_t] = \begin{cases} \dfrac{(\beta\bar{\nu})^2}{2\kappa - \beta^2} & \text{falls } \beta^2 < 2\kappa \\ +\infty & \text{falls } \beta^2 > 2\kappa\ . \end{cases}$$

3.Aufgabe: Überprüfen Sie die Formeln für $\mathsf{E}[\nu_t]$ und $\mathsf{V}[\nu_t]$ aus den Aufgaben 1 und 2 durch eine geeignete Excel/VBA-Simulation.