Hochschule RheinMain
Prof. Dr. D. Lehmann SS 2022

Lösungen 5. Übungsblatt Finanzmathematik II

1.Aufgabe: Mit Teil (b) von Theorem 3.5 erhalten wir

a)

$$\begin{aligned} \mathsf{P}\big[\, x_T \le 1 \,\wedge\, \max_{t\in[0,T]} x_t \le 2 \,\big] &= N\big(\tfrac{1}{\sqrt{1}}\big) + N\big(\tfrac{2\times 2-1}{\sqrt{1}}\big) - 1 \\ &= N(1) + N(3) - 1 \;\approx\; 0.84 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \mathsf{P}\big[\, x_T \le 1 \,\wedge\, \max_{t\in[0,T]} x_t \le 2 \,\big] &= N\big(\tfrac{1}{\sqrt{100}}\big) + N\big(\tfrac{2\times 2-1}{\sqrt{100}}\big) - 1 \\ &= N(0.1) + N(0.3) - 1 \;\approx\; 0.16 \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} \mathsf{P}\big[\, x_T \ge -3 \,\wedge\, \min_{t\in[0,T]} x_t \ge -6 \,\big] &= \mathsf{P}\big[\, -x_T \le 3 \,\wedge\, -\min_{t\in[0,T]} x_t \le 6 \,\big] \\ &= \mathsf{P}\big[\, -x_T \le 3 \,\wedge\, \max_{t\in[0,T]} \{-x_t\} \le 6 \,\big] \\ &= \mathsf{P}\big[\, x_T \le 3 \,\wedge\, \max_{t\in[0,T]} \{x_t\} \le 6 \,\big] \\ &= N\big(\tfrac{3}{\sqrt{9}}\big) + N\big(\tfrac{2\times 6-3}{\sqrt{9}}\big) - 1 \\ &= N(1) + N(3) - 1 \;\approx\; 0.84\,. \end{aligned}$$

2.Aufgabe: Mit der Formel aus Theorem 4.1 bekommen wir:

$$V_{\text{Barrier}}(S_0, 0) \;=\; V_{\text{Call},K}(S_0,0) - \big(\tfrac{S_0}{B}\big)^{1-\kappa}\, V_{\text{Call},K}\big(\tfrac{B^2}{S_0}, 0\big)$$

mit

$$\kappa \;=\; \frac{2r}{\sigma^2} \;\stackrel{r=0}{=}\; 0$$

und den Standard-Call-Preisen

$$\begin{aligned} V_{\text{Call},K}(S_0,0) &= S_0\, N(d_+) \,-\, Ke^{-rT} N(d_-) \\ V_{\text{Call},K}(B^2/S_0,0) &= B^2/S_0\, N(\tilde d_+) \,-\, Ke^{-rT} N(\tilde d_-) \end{aligned}$$

mit

$$
\begin{aligned}
d_{\pm} &= \frac{\log\left[\frac{S_0}{K}\right] + (r \pm \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} \\
\tilde{d}_{\pm} &= \frac{\log\left[\frac{B^2/S_0}{K}\right] + (r \pm \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}
\end{aligned}
$$

Für $r = 0$,

$$
V_{\text{Barrier}}(S_0, 0) = V_{\text{Call},K}(S_0, 0) - \tfrac{S_0}{B} \times V_{\text{Call},K}\left(\tfrac{B^2}{S_0}, 0\right)
$$

mit

$$
\begin{aligned}
V_{\text{Call},K}(S_0, 0) &= S_0\, N(d_+) \,-\, K N(d_-) \\
V_{\text{Call},K}(B^2/S_0) &= B^2/S_0\, N(\tilde{d}_+) \,-\, K N(\tilde{d}_-)
\end{aligned}
$$

und

$$
\begin{aligned}
d_{\pm} &= \frac{\log\left[\frac{S_0}{K}\right] \pm \sigma^2 T/2}{\sigma\sqrt{T}} \\
&= \frac{\log\left[\frac{100}{100}\right] \pm 0.045}{0.3} \\
&= \pm\, 0.15
\end{aligned}
$$

und

$$
\begin{aligned}
\tilde{d}_{\pm} &= \frac{\log\left[\frac{B^2/S_t}{K}\right] \pm \sigma^2 T/2}{\sigma\sqrt{T}} \\
&= \frac{\log\left[0.64\right] \pm 0.045}{0.3} \\
&= \begin{cases} -1.3376 & \text{fuer "} + \text{"} \\ -1.6376 & \text{fuer "} - \text{"} \end{cases}
\end{aligned}
$$

Also

$$
\begin{aligned}
V_{\text{Call},K}(S_0, 0) &= S_0\, N(d_+) \,-\, K N(d_-) \\
&= 100\, N(0.15) \,-\, 100 N(-0.15) \\
&= 55.96 \,-\, 44.04 \,=\, 11.92
\end{aligned}
$$

und

$$
\begin{aligned}
\tfrac{S_0}{B} \times V_{\text{Call},K}\left(\tfrac{B^2}{S_0}, 0\right) &= \tfrac{S_0}{B} \times \left[B^2/S_0\, N(\tilde{d}_+) \,-\, K N(\tilde{d}_-)\right] \\
&= B\, N(\tilde{d}_+) \,-\, S_0 K/B N(\tilde{d}_-) \\
&= 80 \times 0.0905 \,-\, 125 \times 0.05075 \,=\, 0.8970
\end{aligned}
$$

Also insgesamt

$$V_{\text{Barrier}}(S_0, 0) \;=\; 11.92 \;-\; 0.8970 \;=\; 11.03$$

und das Vorhandensein der Barriere tut den Preis also nur um 0.8970 verbilligen.

3.Aufgabe: Nach Theorem 4.1 ist der Zeit t Preis eines Barrier Down-and-Out Calls gegeben durch

$$V_{\text{Barrier}}(S_t, t) \;=\; V_{\text{Call},K}(S_t, t) - \left(\tfrac{S_t}{B}\right)^{1-\kappa} V_{\text{Call},K}\left(\tfrac{B^2}{S_t}, t\right)$$

mit

$$\kappa \;=\; \frac{2r}{\sigma^2} \;\stackrel{r=0}{=}\; 0$$

und den Standard-Call-Preisen

$$\begin{aligned} V_{\text{Call},K}(S_t, t) &= S_t\, N(d_+) - Ke^{-r(T-t)} N(d_-) \\ V_{\text{Call},K}(B^2/S_t) &= B^2/S_t\, N(\tilde{d}_+) - Ke^{-r(T-t)} N(\tilde{d}_-) \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} d_\pm &= \frac{\log\left[\frac{S_t}{K}\right] + (r \pm \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \\ \tilde{d}_\pm &= \frac{\log\left[\frac{B^2/S_t}{K}\right] + (r \pm \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \end{aligned}$$

Für $r = 0$ und $K = B$ erhält man also

$$\begin{aligned} V_{\text{Call},K}(S_t, t) &= S_t\, N(d_+) - BN(d_-) \\ V_{\text{Call},K}(B^2/S_t) &= B^2/S_t\, N(\tilde{d}_+) - BN(\tilde{d}_-) \end{aligned}$$

mit

$$d_\pm \;=\; \frac{\log\left[\frac{S_t}{B}\right] \pm \sigma^2(T-t)/2}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

und

$$\begin{aligned} \tilde{d}_\pm &= \frac{\log\left[B/S_t\right] \pm \sigma^2(T-t)/2}{\sigma\sqrt{T-t}} \\ &= \frac{-\log\left[S_t/B\right] \pm \sigma^2(T-t)/2}{\sigma\sqrt{T-t}} \\ &= -\,\frac{\log\left[S_t/B\right] \mp \sigma^2(T-t)/2}{\sigma\sqrt{T-t}}\,, \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} \tilde{d}_+ &= -d_- \\ \tilde{d}_- &= -d_+ \end{aligned}$$

und damit

$$
\begin{aligned}
V_{\text{Barrier}}(S_t,t) &= V_{\text{Call},K}(S_t,t) \;-\; \tfrac{S_t}{B}\times V_{\text{Call},K}\left(\tfrac{B^2}{S_t}\right) \\
&= S_t\,N(d_+) - BN(d_-) \;-\; \tfrac{S_t}{B}\times\left\{B^2/S_t\,N(\tilde{d}_+) - BN(\tilde{d}_-)\right\} \\
&= S_t\,N(d_+) - BN(d_-) \;-\; B\,N(\tilde{d}_+) + S_tN(\tilde{d}_-) \\
&= S_t\,N(d_+) - BN(d_-) \;-\; B\,N(-d_-) + S_tN(-d_+) \\
&= S_t\,\underbrace{\left[N(d_+) + N(-d_+)\right]}_{=1} \;-\; B\underbrace{\left[N(d_-) + N(-d_-)\right]}_{=1} \\
&= S_t \,-\, B \;=\; S_t \,-\, K\;.
\end{aligned}
$$

Der Payoff kann repliziert werden, wenn zur Zeit t genau

$$
\delta_t \;=\; \frac{\partial V}{\partial S_t} \;=\; 1
$$

Anteile vom Underlying gehalten werden, solange die Barriere noch nicht getroffen wurde. Wird die Barriere bei $t = t_{\text{barrier hit}}$ getroffen, ist die Position dann sofort zu schliessen, also $\delta_t = 0$ für alle $t \geq t_{\text{barrier hit}}$.