Hochschule RheinMain
Prof. Dr. D. Lehmann SS 2022

Lösungen zum 1. Übungsblatt
Finanzmathematik II

Aufgabe 1) Die Formel aus Teil a) ist ein Spezialfall der Formel aus Teil b) für den Fall Zinsen $r = 0$. Es reicht also, den Fall b) zu beweisen. Mit der Abkürzung

$$R \;:=\; 1 + r$$

können wir die Formel aus b) auch so schreiben:

$$\begin{aligned} v_N \;&=\; v_0 \,+\, \sum_{k=1}^{N} \delta_{k-1}(s_k - s_{k-1}) \\ R^{-N} V_N \;&=\; V_0 \,+\, \sum_{k=1}^{N} \delta_{k-1}(R^{-k} S_k \,-\, R^{-(k-1)} S_{k-1}) \\ V_N \;&=\; R^N V_0 \,+\, \sum_{k=1}^{N} \delta_{k-1}(R^{N-k} S_k \,-\, R^{N-(k-1)} S_{k-1}) \end{aligned}$$

Wir zeigen jetzt durch Induktion: Für eine beliebige Zeit $\ell \in \{0, 1, \cdots, N\}$ ist der Portfoliowert V_ℓ gegeben durch

$$V_\ell \;=\; R^\ell V_0 \,+\, \sum_{k=1}^{\ell} \delta_{k-1}(R^{\ell-k} S_k \,-\, R^{\ell-(k-1)} S_{k-1})$$

Für $\ell = N$ folgt dann die Behauptung.

Induktionsanfang: Für $\ell = 0$ haben wir

$$V_0 \;=\; R^0 V_0 \,+\, \sum_{k=1}^{0} \cdots \;=\; V_0$$

da die Summe keine Terme enthält. Das stimmt also.

Schluss von ℓ auf $\ell + 1$: Die Formel stimme für ℓ, am Ende von Tag ℓ hat das Bank-Portfolio also den Wert

$$V_\ell \;=\; R^\ell V_0 \,+\, \sum_{k=1}^{\ell} \delta_{k-1}(R^{\ell-k} S_k \,-\, R^{\ell-(k-1)} S_{k-1})$$

Nach Definition der Handelsstrategie, müssen wir am Ende von Tag ℓ eine Anzahl von δ_ℓ Stücken vom Underlying halten. Der Preis des Underlyings am Ende von Tag ℓ ist S_ℓ und wir müssen den Betrag $\delta_\ell S_\ell$ bezahlen. Wir haben also am Ende von Tag ℓ

$$V_\ell \;=\; \underbrace{R^\ell V_0 \;+\; \sum_{k=1}^{\ell} \delta_{k-1}(R^{\ell-k} S_k \;-\; R^{\ell-(k-1)} S_{k-1}) \;-\; \delta_\ell S_\ell}_{\text{cash}} \;+\; \underbrace{\delta_\ell S_\ell}_{\text{Aktie}}$$

Die Zeit vergeht von Tag ℓ nach Tag $\ell+1$. Der Cash- oder Geld-Betrag wird gemäss $G \to RG$ verzinst. Das Underlying oder die Aktie verändert ihren Wert gemäss $S_\ell \to S_{\ell+1}$. Der Wert des Bank-Portfolios am Ende von Tag $\ell+1$ beträgt also

$$\begin{aligned}
V_{\ell+1} \;&=\; R\Big\{ R^\ell V_0 \;+\; \sum_{k=1}^{\ell} \delta_{k-1}(R^{\ell-k} S_k \;-\; R^{\ell-(k-1)} S_{k-1}) \;-\; \delta_\ell S_\ell \Big\} \;+\; \delta_\ell S_{\ell+1} \\
&=\; R^{\ell+1} V_0 \;+\; \sum_{k=1}^{\ell} \delta_{k-1}(R^{\ell+1-k} S_k \;-\; R^{\ell+1-(k-1)} S_{k-1}) \;-\; \delta_\ell R S_\ell \;+\; \delta_\ell S_{\ell+1} \\
&=\; R^{\ell+1} V_0 \;+\; \sum_{k=1}^{\ell} \delta_{k-1}(R^{\ell+1-k} S_k \;-\; R^{\ell+1-(k-1)} S_{k-1}) \;+\; \delta_\ell (S_{\ell+1} \;-\; R S_\ell) \\
&=\; R^{\ell+1} V_0 \;+\; \sum_{k=1}^{\ell+1} \delta_{k-1}(R^{\ell+1-k} S_k \;-\; R^{\ell+1-(k-1)} S_{k-1})
\end{aligned}$$

Damit ist die Formel auch für $\ell+1$ verifiziert.

Aufgabe 2) Wir haben ein Startgeld V_0. Zum Zeitpunkt $t=0$ kaufen wir δ Stücke vom Underlying, dafür müssen wir (die Bank) $\delta\, S_0$ bezahlen. Das Bank-Portfolio zum Zeitpunkt $t=0$ sieht also so aus:

$$V_0 \;=\; \underbrace{V_0 \,-\, \delta S_0}_{\text{cash}} \,+\, \underbrace{\delta S_0}_{\text{Aktie}}$$

Die Zeit vergeht von $t=0$ nach $t=T$. Die Cash-Position bleibt gleich (wir nehmen an, dass die Zinsen 0 sind, $r=0$). Die Aktien-Position verändert ihren Wert von δS_0 zu δS_T mit $S_T \in \{\mathrm{ret}_{\mathrm{up}}, \mathrm{ret}_{\mathrm{down}}\}$. Also, der Wert des Bank-Portfolios zur Zeit $t=T$ beträgt

$$V_T \;=\; \underbrace{V_0 \,-\, \delta S_0}_{\text{cash}} \,+\, \underbrace{\delta S_T}_{\text{Aktie}} \;\stackrel{!}{=}\; H(S_T)$$

Dabei ist $H(S_T) \in \{H_{\mathrm{up}}, H_{\mathrm{down}}\}$ die Optionsauszahlung. Also erhalten wir die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned}
V_0 \,-\, \delta S_0 \,+\, \delta S_{\mathrm{up}} \;&=\; H_{\mathrm{up}} \\
V_0 \,-\, \delta S_0 \,+\, \delta S_{\mathrm{down}} \;&=\; H_{\mathrm{down}}
\end{aligned}$$

Wenn wir die zweite von der ersten Gleichung abziehen, bekommen wir

$$\delta(S_{\mathrm{up}} - S_{\mathrm{down}}) \;=\; H_{\mathrm{up}} - H_{\mathrm{down}}$$

oder

$$\delta \;=\; \frac{H_{\mathrm{up}} - H_{\mathrm{down}}}{S_{\mathrm{up}} - S_{\mathrm{down}}}$$

Das können wir etwa in die erste Gleichung einsetzen und bekommen

$$\begin{aligned}
V_0 &= H_{\mathrm{up}} \;-\; \delta(S_{\mathrm{up}} - S_0) \\
&= H_{\mathrm{up}} \;-\; \frac{H_{\mathrm{up}} - H_{\mathrm{down}}}{S_{\mathrm{up}} - S_{\mathrm{down}}}\,(S_{\mathrm{up}} - S_0) \\
&= H_{\mathrm{up}}\,\frac{S_{\mathrm{up}} - S_{\mathrm{down}}}{S_{\mathrm{up}} - S_{\mathrm{down}}} \;-\; H_{\mathrm{up}}\,\frac{S_{\mathrm{up}} - S_0}{S_{\mathrm{up}} - S_{\mathrm{down}}} \;+\; H_{\mathrm{down}}\,\frac{S_{\mathrm{up}} - S_0}{S_{\mathrm{up}} - S_{\mathrm{down}}} \\
&= H_{\mathrm{up}}\,\frac{S_0 - S_{\mathrm{down}}}{S_{\mathrm{up}} - S_{\mathrm{down}}} \;+\; H_{\mathrm{down}}\,\frac{S_{\mathrm{up}} - S_0}{S_{\mathrm{up}} - S_{\mathrm{down}}} \\
&= H_{\mathrm{up}}\,w_{\mathrm{up}} \;+\; H_{\mathrm{down}}\,w_{\mathrm{down}}
\end{aligned}$$

mit den Gewichten

$$\begin{aligned}
w_{\mathrm{up}} &= \frac{S_0 - S_{\mathrm{down}}}{S_{\mathrm{up}} - S_{\mathrm{down}}}\,, \\
w_{\mathrm{down}} &= \frac{S_{\mathrm{up}} - S_0}{S_{\mathrm{up}} - S_{\mathrm{down}}}\,.
\end{aligned}$$