Hochschule RheinMain
Prof. Dr. D. Lehmann

SS 2022

Probe-Klausur zur Vorlesung
Finanzmathematik II

Nachname:	
Vorname:	
Matrikelnummer:	

Matrikelnummer:		Note:	

Aufgabe:	1	2	3	4	5	6	7	8	Summe:
Punkte:	10	12	12	12	8	12	8	6	80
erreicht:									

Formaler Hinweis: Legen Sie zu den Programmier-Aufgaben 6 - 8 ein Excelsheet

`Nachname-Vorname.xlsm`

an, welches Sie etwa auf dem Desktop Ihres Computers speichern können. Transferieren Sie dieses File bitte am Ende der Klausur auf den **an Ihrem Platz ausliegenden USB-Stick** und geben Sie diesen USB-Stick dann ab. Es wird nur das bewertet, was sich auf dem USB-Stick befindet, also stellen Sie bitte sicher, dass auch wirklich alles drauf ist und dass das File Ihren Namen trägt[1].

Bevor Sie mit dem Programmier-Teil beginnen, bei dem sämtliche Hilfsmittel erlaubt sind, müssen Sie Ihre Lösungen zum Theorie-Teil abgegeben haben. Die Zeit, die Sie für den Theorie-Teil aufwenden wollen, können Sie selber festlegen. Wenn Sie den Computer einschalten, bevor Sie den Theorie-Teil abgegeben haben, muss die Klausur als **nicht bestanden** gewertet werden.

Bitte geben Sie Ihre elektronischen Kommunikationsgeräte vorne ab. Wenn während der Klausur etwa ein Mobil-Telefon benutzt wird, muss die Klausur als **nicht bestanden** gewertet werden.

..bitte wenden

[1] bitte melden Sie sich, falls es ein Problem geben sollte, die Aufsicht wird Ihnen dann helfen

Theorie-Teil:

1.Aufgabe (10 Punkte): Für einen Standard At The Money Call mit Laufzeiten T_i werden am Markt folgende implizite Volatilitäten beobachtet:

Laufzeit in Jahren:	0.25	0.5	1.0	2.0	4.0
implizite Volatilität:	28%	22%	18%	20%	20%

Kalibrieren Sie ein zeitabhängiges Black-Scholes Modell derart, so dass dieses die am Markt beobachteten impliziten Volatilitäten aus der obigen Tabelle reproduziert. Wählen Sie dazu eine stückweise konstante Funktion $t \to \sigma_t$ für die instantane Volatilität im BSTD Modell.

2.Aufgabe (12 Punkte): Es sei $\{x_t\}_{t\geq 0}$ eine Brownsche Bewegung. Berechnen Sie folgende Wahrscheinlichkeiten:

a) $\mathsf{P}\big[\max_{t\in[0,T]} x_t \leq 2\big]$ für $T = 4$.

b) $\mathsf{P}\big[x_T \leq 1 \wedge \max_{t\in[0,T]} x_t \leq 2\big]$ für $T = 4$.

c) $\mathsf{P}\big[x_T \leq 1 \wedge \max_{t\in[0,T]} x_t \geq 2\big]$ für $T = 4$.

3.Aufgabe (12 Punkte): Die Preisdynamik eines Underlyings $\{S_t\}_{t\geq 0}$ sei gegeben durch das zeitunabhängige Black-Scholes Modell $dS_t/S_t = \mu\, dt + \sigma\, dx_t$ mit $\sigma = 30\%$ und $\mu = 5\%$. Nehmen Sie an, dass die Zinsen null sind, $r = 0$. Der aktuelle Preis des Underlyings sei $S_0 = 100$. Betrachten Sie den Down-and-Out Barrier Call mit payoff

$$H_{\text{Down,Out}}(\{S_t\}_{0\leq t\leq T}) \;=\; \max\{S_T - K, 0\} \times \chi\big(\min_{t\in[0,T]} S_t > B\big)$$

mit Laufzeit $T = 5$ Jahren und Parametern $K = 80$ und $B = 60$. Berechnen Sie den $t = 0$ Preis V_0 dieser Option.

4.Aufgabe (12 Punkte): Berechnen Sie den folgenden Erwartungswert bezüglich des Standard-Wienermaßes:

$$\mathsf{E}_W\big[\, e^{-\int_0^4 \sigma_t\, dx_t} \,\big]$$

mit

$$\sigma_t \;:=\; \begin{cases} 1 & \text{falls } t \in [1,2] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und $\{x_t\}_{t\geq 0}$ eine Brownsche Bewegung.

5.Aufgabe (8 Punkte): Ein Prozess r_t sei gegeben durch die stochastische Differentialgleichung

$$dr_t \;=\; -\,2\,r_t\,dt \;+\; \sqrt{r_t^2+1}\,dx_t$$

mit x_t eine Brownsche Bewegung und Startwert $r_{t=0} = 1$. Berechnen Sie analytisch den Erwartungswert $\mathsf{E}[r_t]$.

Programmier-Teil:

6.Aufgabe (12 Punkte): Berechnen Sie folgende Integrale numerisch mit Hilfe einer Monte Carlo Simulation in VBA. Wählen Sie dazu etwa jeweils 10000 Zufallszahlen:

a) $I_1 \;:=\; \int_{-\infty}^{\infty} x^2\,e^{-x^2}\,dx$

b) $I_2 \;:=\; \int_0^2 \int_0^2 \chi(x^2+y^2 \leq 4)\,dx\,dy$

c) $I_3 \;:=\; \int_{-1/2}^{1} e^{-2x^2}\,dx$

7.Aufgabe (8 Punkte): Die risikoneutrale Preisdynamik eines Underlyings S_t sei gegeben durch ein zeitunabhängiges Black-Scholes Modell

$$dS_t/S_t \;=\; r\,dt \;+\; \sigma\,dx_t$$

mit $r = 2\%$ und $\sigma = 25\%$. Der aktuelle Underlyingpreis sei $S_0 = 100$. Berechnen Sie den Preis einer Standard-Verkaufs-Option mit Auszahlung

$$H(S_T) \;:=\; \max\big\{\,90 \;-\; S_T\,,\,0\,\big\}$$

und Laufzeit $T = 2$ Jahre mit Hilfe einer Monte Carlo Simulation. Wählen Sie dazu 250 Zeitschritte pro Jahr.

8.Aufgabe (6 Punkte): Ein Prozess r_t sei wie in Aufgabe 5 gegeben durch die stochastische Differentialgleichung

$$dr_t \;=\; -\,2\,r_t\,dt \;+\; \sqrt{r_t^2+1}\,dx_t$$

mit x_t eine Brownsche Bewegung und Startwert $r_{t=0} = 1$. Berechnen Sie den Erwartungswert $\mathsf{E}[r_t]$ für $t \in [0,5]$ mit Hilfe einer Monte Carlo Simulation und plotten Sie $\mathsf{E}[r_t]$ für $t \in [0,5]$.