Hochschule RheinMain | Finanzmathematik II
Prof. Dr. D. Lehmann | SS 2022

Lösungen Übungsblatt 10 Finanzmathematik II

1.Aufgabe: In diskreter Zeit $t = t_k = k\Delta t$ ist die Brownsche Bewegung gegeben durch

$$x_{t_k} \;=\; \sqrt{\Delta t}\,\textstyle\sum_{j=1}^{k} \phi_j$$

mit standard-normalverteilten ϕ_j's, so dass das dx_t gegeben ist durch

$$dx_{t_k} \;:=\; x_{t_k} - x_{t_{k-1}} \;=\; \sqrt{\Delta t}\,\phi_k$$

Die SDE ist dann äquivalent zu der folgenden stochastischen Rekursion:

$$\nu_{t_k} \;=\; \nu_{t_{k-1}} \,+\, \kappa(\bar\nu - \nu_{t_{k-1}})\,\Delta t \,+\, \beta\,\nu_{t_{k-1}}^{\gamma}\sqrt{\Delta t}\,\phi_k$$

Die Abhängigkeit der ν's von den ϕ's sieht also so aus:

$$\begin{aligned} \nu_{t_k} &= \nu_{t_k}(\phi_1,\cdots,\phi_{k-1},\phi_k) \\ \nu_{t_{k-1}} &= \nu_{t_{k-1}}(\phi_1,\cdots,\phi_{k-1}) \end{aligned}$$

Damit bekommen wir

$$\begin{aligned} \mathsf{E}\big[\,\beta\,\nu_{t_{k-1}}^{\gamma}\sqrt{\Delta t}\,\phi_k\,\big] &= \beta\sqrt{\Delta t}\;\mathsf{E}\Big[\,\nu_{t_{k-1}}^{\gamma}(\phi_1,\cdots,\phi_{k-1})\,\phi_k\,\Big] \\ &= \beta\sqrt{\Delta t}\;\mathsf{E}\Big[\,\nu_{t_{k-1}}^{\gamma}(\phi_1,\cdots,\phi_{k-1})\,\Big] \times \underbrace{\mathsf{E}[\,\phi_k\,]}_{=0} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Das ist eine allgemeine Sache bei stochastischen DGLs, der Erwartungswert vom diffusiven Teil verschwindet. Wenn wir also den Erwartungswert von der SDE nehmen, bekommen wir

$$\begin{aligned} \mathsf{E}[\,d\nu_t\,] &= \kappa(\bar\nu - \mathsf{E}[\,\nu_t\,])\,dt \,+\, \beta\,\mathsf{E}\big[\,\nu_t^{\gamma}\,dx_t\,\big] \\ &= \kappa(\bar\nu - \mathsf{E}[\,\nu_t\,])\,dt \,+\, 0 \qquad (1) \end{aligned}$$

Nun ist, wieder in diskreter Zeit $t = t_k = k\Delta t$,

$$\mathsf{E}[\,d\nu_{t_k}\,] \;=\; \mathsf{E}\big[\,\nu_{t_k} - \nu_{t_{k-1}}\,\big] \;=\; \mathsf{E}[\,\nu_{t_k}\,] - \mathsf{E}[\,\nu_{t_{k-1}}\,]$$

Also folgt aus (1)

$$\begin{aligned} \mathsf{E}[\,d\nu_{t_k}\,] \;=\; \mathsf{E}[\,\nu_{t_k}\,] - \mathsf{E}[\,\nu_{t_{k-1}}\,] &= \kappa\big(\bar\nu - \mathsf{E}[\,\nu_{t_{k-1}}\,]\big)\,\Delta t \\ \Leftrightarrow \qquad \frac{\mathsf{E}[\,\nu_{t_k}\,] - \mathsf{E}[\,\nu_{t_{k-1}}\,]}{\Delta t} &= \kappa\big(\bar\nu - \mathsf{E}[\,\nu_{t_{k-1}}\,]\big) \end{aligned}$$

und im Limes $\Delta t \to 0$

$$\frac{d}{dt}\mathsf{E}[\,\nu_t\,] \;=\; \kappa\big(\bar\nu - \mathsf{E}[\,\nu_t\,]\big)$$

oder

$$\frac{d}{dt}\mathsf{E}[\,\nu_t\,] \;+\; \kappa\,\mathsf{E}[\,\nu_t\,] \;=\; \kappa\bar\nu$$

und diese DGL wird gelöst von

$$\mathsf{E}[\,\nu_t\,] \;=\; \bar\nu + (\nu_0 - \bar\nu)\,e^{-\kappa t} \quad .$$

2.Aufgabe: **a)** Wir haben

$$\begin{aligned}
d(\nu_t^2) &= 2\nu_t\,d\nu_t \;+\; \frac{1}{2}\,2\,(d\nu_t)^2 \\
&= 2\nu_t\left[\,\kappa(\bar\nu - \nu_t)\,dt \;+\; \beta\,\nu_t^\gamma\,dx_t\,\right] \;+\; \left[\,\kappa(\bar\nu - \nu_t)\,dt \;+\; \beta\,\nu_t^\gamma\,dx_t\,\right]^2 \\
&= 2\nu_t\left[\,\kappa(\bar\nu - \nu_t)\,dt \;+\; \beta\,\nu_t^\gamma\,dx_t\,\right] \;+\; \left[\,\beta\,\nu_t^\gamma\,dx_t\,\right]^2 \\
&= 2\nu_t\left[\,\kappa(\bar\nu - \nu_t)\,dt \;+\; \beta\,\nu_t^\gamma\,dx_t\,\right] \;+\; \beta^2\,\nu_t^{2\gamma}\,dt \\
&= \left[2\kappa(\bar\nu\,\nu_t - \nu_t^2) + \beta^2\nu_t^{2\gamma}\right]dt \;+\; 2\beta\,\nu_t^{\gamma+1}\,dx_t
\end{aligned}$$

b) Wir nehmen den Erwartungswert und bekommen:

$$\mathsf{E}\big[\,d(\nu_t^2)\,\big] \;=\; \Big\{2\kappa\big(\,\bar\nu\,\mathsf{E}[\nu_t] \;-\; \mathsf{E}[\nu_t^2]\big) \;+\; \beta^2\,\mathsf{E}[\nu_t^{2\gamma}]\,\Big\}\,dt \;+\; 0$$

Wegen

$$\mathsf{E}\big[\,d(\nu_t^2)\,\big] \;=\; d\mathsf{E}[\nu_t^2]$$

und mit den Definitionen

$$\begin{aligned}
E_t \;&\equiv\; E(t) \;:=\; \mathsf{E}[\nu_t] \\
F_t \;&\equiv\; F(t) \;:=\; \mathsf{E}[\nu_t^2]
\end{aligned}$$

liefert das dann

$$\begin{aligned}
dF_t &= \Big\{2\kappa\big(\,\bar\nu\,\mathsf{E}[\nu_t] \;-\; \mathsf{E}[\nu_t^2]\big) \;+\; \beta^2\,\mathsf{E}[\nu_t^{2\gamma}]\,\Big\}\,dt \\
&= \Big\{2\kappa\big(\,\bar\nu\,E_t \;-\; F_t\big) \;+\; \beta^2\,\mathsf{E}[\nu_t^{2\gamma}]\,\Big\}\,dt
\end{aligned}$$

oder, mit $F_t' = dF_t/dt$,

$$\begin{aligned}
F_t' \;+\; 2\kappa\,F_t &= 2\kappa\bar\nu\,E_t \;+\; \beta^2\,\mathsf{E}[\nu_t^{2\gamma}] \\
&= 2\kappa\bar\nu\,E_t \;+\; \beta^2\begin{cases} \mathsf{E}[1] & \text{für } \gamma = 0 \\ \mathsf{E}[\nu_t] & \text{für } \gamma = 1/2 \\ \mathsf{E}[\nu_t^2] & \text{für } \gamma = 1 \end{cases}
\end{aligned}$$

und damit

$$F_t' \,+\, 2\kappa\, F_t \;\;=\;\; 2\kappa\bar{\nu}\, E_t \,+\, \beta^2 \begin{cases} 1 & \text{für } \;\gamma = 0 \\ E_t & \text{für } \;\gamma = 1/2 \\ F_t & \text{für } \;\gamma = 1 \end{cases}$$

c) Für den Limes $t \to \infty$ ersetzen wir das E_t durch

$$\lim_{t\to\infty} E_t \;\;=\;\; \lim_{t\to\infty} \left\{ \bar{\nu} + (\nu_0 - \bar{\nu})\, e^{-\kappa t} \right\} \;\;=\;\; \bar{\nu}$$

und bekommen die folgenden DGLs: Für $\gamma = 0$,

$$F_t' \,+\, 2\kappa\, F_t \;\;=\;\; 2\kappa\bar{\nu}^2 \,+\, \beta^2 \tag{2}$$

Für $\gamma = 1/2$,

$$F_t' \,+\, 2\kappa\, F_t \;\;=\;\; 2\kappa\bar{\nu}^2 \,+\, \beta^2\bar{\nu} \tag{3}$$

Und für $\gamma = 1$,

$$F_t' \,+\, 2\kappa\, F_t \;\;=\;\; 2\kappa\bar{\nu}^2 \,+\, \beta^2 F_t$$

oder

$$F_t' \,+\, (2\kappa - \beta^2)\, F_t \;\;=\;\; 2\kappa\bar{\nu}^2 \tag{4}$$

(2-4) sind lineare, inhomogene Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten. Die Lösung ist die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung plus eine partikuläre oder spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung. Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung ist für $\gamma \in \{0, 1/2, 1\}$, in der Reihenfolge,

$$F_t \;\;=\;\; c_1\, e^{-2\kappa t} \tag{5}$$

$$F_t \;\;=\;\; c_2\, e^{-2\kappa t} \tag{6}$$

$$F_t \;\;=\;\; c_3\, e^{-(2\kappa-\beta^2)t} \tag{7}$$

Eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung ist, wieder für $\gamma \in \{0, 1/2, 1\}$, in der Reihenfolge,

$$F_t \;\;=\;\; \tfrac{2\kappa\bar{\nu}^2+\beta^2}{2\kappa} \tag{8}$$

$$F_t \;\;=\;\; \tfrac{2\kappa\bar{\nu}^2+\beta^2\bar{\nu}}{2\kappa} \tag{9}$$

$$F_t \;\;=\;\; \tfrac{2\kappa\bar{\nu}^2}{2\kappa-\beta^2} \tag{10}$$

Im Limes $t \to \infty$ geht der homogene Anteil nach 0, im Fall $\gamma = 1$ nur für $2\kappa > \beta^2$, so dass

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} \mathsf{V}[\nu_t] &= \lim_{t\to\infty} \left\{ F_t \ - \ E_t^2 \right\} \\
&= \lim_{t\to\infty} F_t \ - \ \bar{\nu}^2 \\
&= \begin{cases} \bar{\nu}^2 + \frac{\beta^2}{2\kappa} \\ \bar{\nu}^2 + \frac{\beta^2 \bar{\nu}}{2\kappa} \\ \frac{2\kappa\bar{\nu}^2}{2\kappa-\beta^2} \end{cases} \quad - \quad \bar{\nu}^2 \\
&= \begin{cases} \frac{\beta^2}{2\kappa} \\ \frac{\beta^2 \bar{\nu}}{2\kappa} \\ \frac{2\kappa\bar{\nu}^2 - \bar{\nu}^2(2\kappa-\beta^2)}{2\kappa-\beta^2} \end{cases} \\
&= \begin{cases} \frac{\beta^2}{2\kappa} & \text{für } \gamma = 0 \\ \frac{\beta^2 \bar{\nu}}{2\kappa} & \text{für } \gamma = 1/2 \\ \frac{\bar{\nu}^2\beta^2}{2\kappa-\beta^2} & \text{für } \gamma = 1 \end{cases} \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$