

## week2b: Kapitel 2.1: Erinnerung: Die Normalverteilung und Gauss'sche Integrale

**Definition 2.1.1:** Eine Zufallsvariable oder Zufallszahl  $\phi$  heisst normalverteilt mit Mittelwert  $\mu \in \mathbb{R}$  und Standardabweichung  $\sigma > 0$ , wenn

$$\text{Prob}[\phi \in [x, x + dx)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

Die Funktion

$$p(x; \mu, \sigma) := \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

heisst Dichte der Gauss'schen Normalverteilung mit Erwartungswert  $\mu$  und Standardabweichung  $\sigma$ . Ist  $\mu = 0$  und  $\sigma = 1$ , dann sagt man auch, dass  $\phi$  standard-normalverteilt ist.

**Bemerkung 2.1.2:** In der R-Software bekommt man diese Funktion mit der folgenden Syntax:

$$p(x; \mu, \sigma) = \text{dnorm}(x, \text{mean} = \mu, \text{sd} = \sigma)$$

Der Aufruf `dnorm(x)` ohne eine Angabe von `mean` und `sd` liefert die Standard-Normalverteilung, also

$$\text{dnorm}(x) = p(x; \mu = 0, \sigma = 1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Darüber hinaus sind in R ebenfalls die Funktionen

$$\begin{aligned} \text{pnorm}(x, \text{mean} = \mu, \text{sd} = \sigma) &:= \int_{-\infty}^x \text{dnorm}(y, \text{mean} = \mu, \text{sd} = \sigma) dy \\ &= \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}} dy \end{aligned}$$

und

$$\text{qnorm}(x, \text{mean} = \mu, \text{sd} = \sigma) := \text{pnorm}^{-1}(x, \text{mean} = \mu, \text{sd} = \sigma)$$

vorimplementiert. Dabei meint  $\text{pnorm}^{-1}$  die Umkehrfunktion von  $\text{pnorm}$ , also definiert durch  $y = f(x)$ , dann  $x = f^{-1}(y) = f^{-1}(f(x))$ .

Die folgenden Integrale treten insbesondere in den Finanzmathematik-Vorlesungen recht häufig auf.

**Theorem 2.1.3 (Gauss'sche Integrale):** Es gelten die folgenden Formeln:

a)

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi}$$

b)

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \frac{dx}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} = 1$$

c)

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} = 1$$

d)

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^3 e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} = 0$$

e)

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^4 e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} = 3$$

f) Allgemein, für eine beliebige natürliche Zahl  $n$ ,

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^n e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} = \begin{cases} (n-1)!! & \text{falls } n \text{ gerade} \\ 0 & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

mit den Doppel-Fakultäten

$$(n-1)!! := (n-1)(n-3)(n-5)\cdots 3 \cdot 1.$$

g)

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda x} e^{-\alpha \frac{x^2}{2}} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} e^{\frac{1}{\alpha} \frac{\lambda^2}{2}}, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad \alpha > 0.$$

**Beweis:** a) Mit Polarkoordinaten,

$$x = r \cos \varphi$$

$$y = r \sin \varphi$$

und

$$dx dy = r dr d\varphi$$

bekommen wir

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx &= \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy \right\}^{1/2} \\ &= \left\{ \int_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dx dy \right\}^{1/2} \\ &= \left\{ \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-\frac{r^2}{2}} r dr d\varphi \right\}^{1/2} \\ &= \left\{ 2\pi \int_0^{\infty} e^{-\frac{r^2}{2}} r dr \right\}^{1/2} \\ &= \left\{ 2\pi \left( -e^{-\frac{r^2}{2}} \right) \Big|_0^{\infty} \right\}^{1/2} \\ &= \sqrt{2\pi}. \end{aligned}$$

b) Folgt direkt aus (a) und der Substitution

$$y = \frac{x - \mu}{\sigma} \Rightarrow dy = \frac{dx}{\sigma}$$

denn

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \frac{dx}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} \frac{dy}{\sqrt{2\pi}} \stackrel{(a)}{=} 1.$$

c,d,e) Offensichtlich sind die Formeln (c),(d) und (e) Spezialfälle von (f),

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^n e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} = \begin{cases} (n-1)!! & \text{falls } n \text{ gerade} \\ 0 & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

für den Fall  $n = 2$ ,  $n = 3$  oder  $n = 4$ . Also reicht es, den Teil (f) für allgemeines  $n$  zu beweisen:

**Beweis f)** Mit partieller Integration erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} x^n e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} &= \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{x^{n-1}}_{=f} \times \underbrace{x e^{-\frac{x^2}{2}}}_{=g'} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} \\ &= x^{n-1} \left( -e^{-\frac{x^2}{2}} \right) \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} (n-1) x^{n-2} \left( -e^{-\frac{x^2}{2}} \right) \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} \\ &= 0 + (n-1) \int_{-\infty}^{\infty} x^{n-2} e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} \end{aligned}$$

Der Exponent hat sich also um 2 reduziert. Das kann man jetzt immer so weiter machen und bekommt

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} x^n e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} &= (n-1)(n-3)\cdots \begin{cases} 4 \cdot 2 \times \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} & \text{if } n \text{ is odd} \\ 3 \cdot 1 \times \int_{-\infty}^{\infty} 1 e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} & \text{if } n \text{ is even} \end{cases} \\
&= (n-1)(n-3)\cdots \begin{cases} 4 \cdot 2 \times 0 & \text{if } n \text{ is odd} \\ 3 \cdot 1 \times 1 & \text{if } n \text{ is even} \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & \text{if } n \text{ is odd} \\ (n-1)!! & \text{if } n \text{ is even} \end{cases}
\end{aligned}$$

und der Teil (f) ist bewiesen.

**Beweis g)** By multiplying the equation

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda x} e^{-\alpha \frac{x^2}{2}} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} e^{\frac{1}{\alpha} \frac{\lambda^2}{2}},$$

with  $\sqrt{\alpha} e^{-\frac{1}{\alpha} \frac{\lambda^2}{2}}$  we have to show that

$$\sqrt{\alpha} e^{-\frac{1}{\alpha} \frac{\lambda^2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda x} e^{-\alpha \frac{x^2}{2}} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} = 1.$$

This follows again from part (a), since the left hand side gives

$$\begin{aligned}
\sqrt{\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{\alpha} \frac{\lambda^2}{2}} e^{\lambda x} e^{-\alpha \frac{x^2}{2}} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} &= \sqrt{\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha \frac{x^2}{2} + \lambda x - \frac{\lambda^2}{2\alpha}} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} \\
&= \sqrt{\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\alpha}{2} (x^2 - 2 \frac{\lambda}{\alpha} x + \frac{\lambda^2}{\alpha^2})} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} \\
&= \sqrt{\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\alpha}{2} (x - \frac{\lambda}{\alpha})^2} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} \\
&\stackrel{y=x-\lambda/\alpha}{=} \sqrt{\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\alpha}{2} y^2} \frac{dy}{\sqrt{2\pi}} \\
&\stackrel{v=\sqrt{\alpha}y}{=} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} v^2} \frac{dv}{\sqrt{2\pi}} \\
&\stackrel{(a)}{=} 1
\end{aligned}$$

Damit ist das Theorem bewiesen. ■

Mit dem folgenden Theorem 2.1.4 können wir in der nächsten Veranstaltung zeigen, dass die Summe von  $n$  unabhängigen normalverteilten Zufallszahlen selbst wieder normalverteilt ist (nicht erst im Limes  $n \rightarrow \infty$ ). Das wird dann ein wesentliches Hilfsmittel sein beim Beweis des zentralen Grenzwertsatzes.

**Theorem 2.1.4:** Mit der Notation

$$p_t(x, y) := \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{2t}}$$

gilt die folgende Formel:

$$\int_{\mathbb{R}} p_s(x, y) p_t(y, z) dy = p_{s+t}(x, z) .$$

**Beweis:** Wir haben

$$\begin{aligned} p_s(x, y) p_t(y, z) &= \frac{e^{-\frac{x^2}{2s} - \frac{z^2}{2t}}}{2\pi\sqrt{st}} e^{-\left(\frac{1}{2s} + \frac{1}{2t}\right)y^2 + \left(\frac{x}{s} + \frac{z}{t}\right)y} \\ &= \frac{e^{-\frac{x^2}{2s} - \frac{z^2}{2t}}}{2\pi\sqrt{st}} e^{-\frac{s+t}{2st}(y^2 - 2\frac{xt+zs}{s+t}y)} \\ &= \frac{e^{-\frac{x^2}{2s} - \frac{z^2}{2t}}}{2\pi\sqrt{st}} e^{-\frac{s+t}{2st}\left(y - \frac{xt+zs}{s+t}\right)^2} e^{\frac{s+t}{2st}\left(\frac{xt+zs}{s+t}\right)^2} \\ &= \frac{e^{-\frac{x^2}{2s} - \frac{z^2}{2t}}}{2\pi\sqrt{st}} e^{-\frac{s+t}{2st}\left(y - \frac{xt+zs}{s+t}\right)^2} e^{\frac{(xt+zs)^2}{2st(s+t)}} \\ &= \frac{1}{2\pi\sqrt{st}} e^{-x^2\left(\frac{1}{2s} - \frac{t}{2s(s+t)}\right) - z^2\left(\frac{1}{2t} - \frac{s}{2t(s+t)}\right) + \frac{xz}{s+t}} e^{-\frac{s+t}{2st}\left(y - \frac{xt+zs}{s+t}\right)^2} \\ &= \frac{1}{2\pi\sqrt{st}} e^{-\frac{x^2}{2(s+t)} - \frac{z^2}{2(s+t)} + \frac{xz}{s+t}} e^{-\frac{s+t}{2st}\left(y - \frac{xt+zs}{s+t}\right)^2} \\ &= \frac{1}{2\pi\sqrt{st}} e^{-\frac{(x-z)^2}{2(s+t)}} e^{-\frac{s+t}{2st}\left(y - \frac{xt+zs}{s+t}\right)^2} \end{aligned}$$

Damit bekommen wir

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} p_s(x, y) p_t(y, z) dy &= \frac{1}{2\pi\sqrt{st}} e^{-\frac{(x-z)^2}{2(s+t)}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{s+t}{2st}\left(y - \frac{xt+zs}{s+t}\right)^2} dy \\ &= \frac{1}{2\pi\sqrt{st}} e^{-\frac{(x-z)^2}{2(s+t)}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{s+t}{2st}v^2} dv \\ &= \frac{1}{2\pi\sqrt{st}} e^{-\frac{(x-z)^2}{2(s+t)}} \sqrt{2\pi} \sqrt{\frac{st}{s+t}} \\ &= p_{s+t}(x, z) \end{aligned}$$

und das Theorem ist bewiesen. ■

**Bemerkung 2.1.5:** Die Formel aus Theorem 2.1.4 ist sehr wichtig für die Berechnung von Erwartungswerten, in denen die Brownsche Bewegung auftritt. Die Brownsche Bewegung ist unter anderem Bestandteil des Black-Scholes Modells in stetiger Zeit, ein Standard-Modell in der Finanzmathematik, und Erwartungswerte bekommt man dann beim Berechnen von Optionspreisen.

**Definition 2.1.6:** Das Integral  $\int_{-\infty}^x e^{-\frac{y^2}{2}} \frac{dy}{\sqrt{2\pi}}$  lässt sich nicht durch elementare Funktionen ausdrücken, man kann es nicht explizit ausintegrieren. Da diese Funktion als kumulierte Verteilungsfunktion der Standard-Normalverteilung natürlich sehr wichtig ist, bekommt sie deshalb einen eigenen Buchstaben, meistens ein  $N(x)$  oder ein Gross-Phi, also  $\Phi(x)$ . In dieser Veranstaltung wollen wir das  $N$  benutzen, also wir definieren

$$N(x) := \int_{-\infty}^x e^{-\frac{y^2}{2}} \frac{dy}{\sqrt{2\pi}} .$$