week11b: Kapitel 5.3: Effizienz und Konsistenz, Teil 4
Die Cramer-Rao Abschätzung für das Beispiel 3, Fortsetzung

Wir müssen noch das Theorem 5.3.4 vom letzten Mal beweisen, das war die folgende Aussage:

Theorem 5.3.4: Die $\{x_{t_k}\}_{k=1}^n$ seien gegeben durch einen zeitdiskreten OU-Prozess

$$\begin{aligned} x_{t_k} &= x_{t_{k-1}} + \kappa(\mu - x_{t_{k-1}})\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}\,\phi_k \\ &= \alpha\, x_{t_{k-1}} + \beta + \eta\,\phi_k \end{aligned} \tag{1}$$

mit standard-normalverteilten $\{\phi_k\}_{k=1}^n$ und

$$\begin{aligned} \alpha &:= 1 - \kappa\Delta t \\ \beta &:= \kappa\,\mu\,\Delta t \\ \eta &:= \sigma\sqrt{\Delta t} \end{aligned} \tag{2}$$

und $T = n\Delta t$. Die Grössen $\langle x\rangle_T$ und $\langle x^2\rangle_T$ seien gegeben durch

$$\begin{aligned} \langle x\rangle_T &:= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \mathsf{E}[\,x_{t_{k-1}}\,] \\ \langle x^2\rangle_T &:= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \mathsf{E}[\,x_{t_{k-1}}^2\,] \end{aligned}$$

Der Startwert des OU-Prozesses sei $x_{t_0} := \mu$. Dann gilt im Limes $\Delta t \to 0$:

$$\begin{aligned} \langle x\rangle_T &= \mu \\ \langle x^2\rangle_T &\approx \mu^2 + \frac{\sigma^2}{2\kappa}\,\frac{2\kappa T - 1 + e^{-2\kappa T}}{2\kappa T} \end{aligned}$$

Insbesondere,

$$\langle x^2\rangle_T - \langle x\rangle_T^2 \overset{\Delta t\to 0}{\approx} \frac{\sigma^2}{2\kappa}\,\frac{2\kappa T - 1 + e^{-2\kappa T}}{2\kappa T} \quad .$$

Zum Beweis dieses Theorems beginnen wir mit dem folgendem

Lemma 5.3.5: Gegeben sei die Zahl α und die Zahlenfolge $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$. Dann gilt: Die Rekursion

$$x_k \;=\; \alpha\, x_{k-1} \;+\; c_k \;, \qquad\quad k = 1, 2, ...$$

mit Startwert x_0 wird gelöst von

$$x_k \;=\; \alpha^k x_0 \;+\; \sum_{j=1}^{k} c_j\, \alpha^{k-j} \quad .$$

Beweis: Mit Induktion: Für $k = 1$ haben wir

$$x_1 \;=\; \alpha^1 x_0 \;+\; \sum_{j=1}^{1} c_j\, \alpha^{1-j} \;=\; \alpha\, x_0 \;+\; c_1$$

und das ist korrekt. Die Formel gelte für k. Dann bekommen wir

$$\begin{aligned}
x_{k+1} \;&=\; \alpha\, x_k \;+\; c_{k+1} \\
&=\; \alpha \left\{\; \alpha^k x_0 \;+\; \sum_{j=1}^{k} c_j\, \alpha^{k-j} \;\right\} \;+\; c_{k+1} \\
&=\; \alpha^{k+1} x_0 \;+\; \sum_{j=1}^{k} c_j\, \alpha^{k+1-j} \;+\; c_{k+1} \\
&=\; \alpha^{k+1} x_0 \;+\; \sum_{j=1}^{k+1} c_j\, \alpha^{k+1-j}
\end{aligned}$$

Damit ist das Lemma bewiesen. ■

Wir können das Lemma auf den OU-Prozess (1) anwenden mit

$$c_k \;:=\; \beta \;+\; \eta\, \phi_k$$

und bekommen die explizite Darstellung

$$\begin{aligned}
x_{t_k} \;&=\; \alpha^k x_0 \;+\; \sum_{j=1}^{k} c_j\, \alpha^{k-j} \\
&=\; \alpha^k x_0 \;+\; \sum_{j=1}^{k} (\beta + \eta\, \phi_j)\, \alpha^{k-j} \\
&=\; \alpha^k x_0 \;+\; \beta \sum_{\ell=0}^{k-1} \alpha^{\ell} \;+\; \eta \sum_{j=1}^{k} \phi_j\, \alpha^{k-j} \\
&=\; \alpha^k x_0 \;+\; \beta\, \frac{1-\alpha^k}{1-\alpha} \;+\; \eta \sum_{j=1}^{k} \phi_j\, \alpha^{k-j}
\end{aligned}$$

mit

$$\frac{\beta}{1-\alpha} \;\overset{(2)}{=}\; \frac{\kappa\, \mu\, \Delta t}{\kappa \Delta t} \;=\; \mu \tag{3}$$

Also,

$$
\begin{aligned}
x_{t_k} &= \alpha^k x_0 \;+\; \mu\,(1-\alpha^k) \;+\; \eta \sum_{j=1}^{k} \phi_j\, \alpha^{k-j} \\
&= \mu \;+\; \alpha^k (x_0 - \mu) \;+\; \eta \sum_{j=1}^{k} \phi_j\, \alpha^{k-j} \qquad (4)
\end{aligned}
$$

Insbesondere, mit Startwert $x_0 = \mu$,

$$
x_{t_k} \;=\; \mu \;+\; \eta \sum_{j=1}^{k} \phi_j\, \alpha^{k-j} \qquad (5)
$$

Wegen $\mathsf{E}[\,\phi_j\,] = 0$ erhalten wir daraus sofort

$$
\mathsf{E}[\,x_{t_k}\,] \;=\; \mu \qquad (6)
$$

und

$$
\begin{aligned}
\mathsf{E}[\,x_{t_k}^2\,] &= \mu^2 \;+\; \eta^2 \sum_{j,\ell=1}^{k} \underbrace{\mathsf{E}[\,\phi_j\,\phi_\ell\,]}_{=\,\delta_{j,\ell}}\; \alpha^{k-j}\alpha^{k-\ell} \\
&= \mu^2 \;+\; \eta^2 \sum_{j=1}^{k} \alpha^{2(k-j)} \\
&= \mu^2 \;+\; \eta^2\, \frac{1-\alpha^{2k}}{1-\alpha^2} \qquad (7)
\end{aligned}
$$

Betrachten wir jetzt den Limes $\Delta t \to 0$. Für festes $t_k \;=\; k\Delta t$ haben wir dann

$$
k \;=\; \frac{t_k}{\Delta t} \;\to\; \infty
$$

und damit

$$
\alpha^k \;=\; (1-\kappa\,\Delta t)^k \;=\; \left(1 - \frac{\kappa\, t_k}{k}\right)^k \;\to\; e^{-\kappa t_k} \qquad (8)
$$

Weiterhin ist

$$
\frac{\eta^2}{1-\alpha^2} \;=\; \frac{\sigma^2 \Delta t}{(1-\alpha)(1+\alpha)} \;=\; \frac{\sigma^2 \Delta t}{\kappa \Delta t (2 - \kappa \Delta t)} \;\overset{\Delta t \to 0}{\approx}\; \frac{\sigma^2}{2\kappa} \qquad (9)
$$

Also bekommen wir für kleine Δt

$$
\begin{aligned}
\mathsf{E}[\,x_{t_k}^2\,] &\overset{(7)}{=} \mu^2 \;+\; \frac{\eta^2}{1-\alpha^2}\,(1-\alpha^{2k}) \\
&\overset{(8),(9)}{\approx} \mu^2 \;+\; \frac{\sigma^2}{2\kappa}\,(1-e^{-2\kappa t_k}) \qquad (10)
\end{aligned}
$$

Die Mittelwerte über die Zeiten sind dann gegeben durch

$$\langle x \rangle_T \;=\; \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathsf{E}[\, x_{t_{k-1}} \,] \;=\; \mu \tag{11}$$

und

$$\begin{aligned}
\langle x^2 \rangle_T \;&=\; \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathsf{E}[\, x_{t_{k-1}}^2 \,] \\
&=\; \frac{1}{n\Delta t}\sum_{k=1}^{n} \mathsf{E}[\, x_{t_{k-1}}^2 \,]\, \Delta t \\
&\approx\; \frac{1}{T}\int_0^T \mathsf{E}[\, x_t^2 \,]\, dt \\
&\overset{(10)}{\approx}\; \frac{1}{T}\int_0^T \left\{ \mu^2 \;+\; \frac{\sigma^2}{2\kappa}\,(1-e^{-2\kappa t}) \right\} dt \\
&=\; \mu^2 \;+\; \frac{\sigma^2}{2\kappa} \;-\; \frac{\sigma^2}{2\kappa}\,\frac{1}{T}\int_0^T e^{-2\kappa t}\, dt \\
&=\; \mu^2 \;+\; \frac{\sigma^2}{2\kappa} \;-\; \frac{\sigma^2}{2\kappa}\,\frac{1-e^{-2\kappa T}}{2\kappa T} \\
&=\; \mu^2 \;+\; \frac{\sigma^2}{2\kappa}\,\frac{2\kappa T - 1 + e^{-2\kappa T}}{2\kappa T}
\end{aligned} \tag{12}$$

Aus (11) und (12) folgt dann sofort für kleine Δt

$$\langle x^2 \rangle_T \;-\; \langle x \rangle_T^2 \;\approx\; \frac{\sigma^2}{2\kappa}\,\frac{2\kappa T - 1 + e^{-2\kappa T}}{2\kappa T} \tag{13}$$

Damit ist das Theorem 5.3.4 bewiesen. ■

Folgerung 5.3.5: Im Limes $\Delta t \to 0$ ist die Varianz eines Ornstein-Uhlenbeck Prozesses $\{x_{t_k}\}_{k=0}^{n}$ gegeben durch

$$\mathsf{V}[\, x_t \,] \;\approx\; \frac{\sigma^2}{2\kappa}\,\Big(1 \;-\; e^{-2\kappa t}\Big) \tag{14}$$

Die Formel (14) hatten wir in dem week7b.pdf bei den Bildern für die 2-Sigma-Intervalle benutzt.

Beweis: Das folgt sofort aus den Gleichungen (6) und (10): Mit $t = t_k$,

$$\begin{aligned}
\mathsf{V}[\, x_t \,] \;&=\; \mathsf{E}[\, x_t^2 \,] \;-\; (\mathsf{E}[\, x_t \,])^2 \\
&\approx\; \mu^2 \;+\; \frac{\sigma^2}{2\kappa}\,(1-e^{-2\kappa t_k}) \;-\; \mu^2 \\
&=\; \frac{\sigma^2}{2\kappa}\,(1-e^{-2\kappa t_k})
\end{aligned}$$

Folgerung 5.3.6: Bei beliebigen Startwert x_0 ist der Erwartungswert eines Ornstein-Uhlenbeck Prozesses $\{x_{t_k}\}_{k=0}^n$ gegeben durch

$$\begin{aligned} \mathsf{E}[\, x_{t_k} \,] \quad &= \quad \alpha^k x_0 \; + \; \mu \, (1 - \alpha^k) \\ &\overset{\Delta t \to 0}{\approx} \quad e^{-\kappa t_k} \, x_0 \; + \; (1 - e^{-\kappa t_k}) \, \mu \end{aligned} \tag{15}$$

Beweis: Das folgt sofort aus den Gleichungen (4) und (8). ■

Wir wollen die Formeln (14) und (15) für den Erwartungswert und die Varianz eines OU-Prozesses jetzt noch durch eine R-Simulation überprüfen.