Hochschule RheinMain SS 2021
Prof. Dr. D. Lehmann

7. Übungsblatt zur Vorlesung
Stochastik II

Aufgabe 1) Wir betrachten die folgenden Integrale:

$$
\begin{aligned}
I_1 &:= \int_{\mathbb{R}^2} (x^2+y^2)\, e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\, dx\, dy \\
I_2 &:= \int_{x^2+y^2\leq 1} (x^2+y^2)\, e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\, dx\, dy \\
I_3 &:= \int_{x^2+y^2+z^2\leq 1} \sqrt{x^2+y^2+z^2}\, e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{2}}\, dx\, dy\, dz
\end{aligned}
$$

a) Berechnen Sie jeweils den exakten analytischen Wert von I mit Bleistift und Papier.

b) Berechnen Sie jeweils den numerischen Wert von I mit Hilfe einer Monte Carlo Simulation, indem Sie normalverteilte Zufallszahlen benutzen.

c) Berechnen Sie die numerischen Werte von I_2 und I_3 mit Hilfe einer Monte Carlo Simulation, indem Sie gleichverteilte Zufallszahlen benutzen.

Aufgabe 2) Wir wollen uns schonmal etwas mit der Maximum Likelihood Methode vertraut machen. Führen Sie dazu die folgenden Berechnungen in R durch:

a) Erzeugen Sie $N = 100$ t_5-verteilte Zufallszahlen und speichern Sie sie in dem Vektor $x = (x_1, x_2, \cdots, x_N)$.

b) Wir nehmen jetzt an, dass wir nur wissen, dass die x_i mit Hilfe einer t_n-Verteilung erzeugt worden sind, dass wir aber das n nicht kennen, also dass das eine 5 ist. Wir wollen das n aus den gegebenen Daten zurückgewinnen. Berechnen Sie dazu, etwa für $n \in \{1, 2, \cdots, 20\}$, die Likelihood-Funktion (mit p_{t_n} als Dichte der t_n-Verteilung)

$$L(n) := \prod_{i=1}^{N} p_{t_n}(x_i)$$

und plotten Sie sie als Funktion von $n \in \{1, 2, \cdots, 20\}$.

c) Berechnen Sie ebenfalls die Grössen

$$
\begin{aligned}
\ell_1(n) &:= \log\Big[\prod_{i=1}^{N} p_{t_n}(x_i)\Big] \\
\ell_2(n) &:= \sum_{i=1}^{N} \log\Big[\, p_{t_n}(x_i)\Big]
\end{aligned}
$$

und plotten Sie sie als Funktion von $n \in \{1, 2, \cdots, 20\}$.

..bitte wenden

d) Wiederholen Sie die Schritte (a)-(c) für verschiedene Realisationen von Zufallszahlen $x = (x_1, x_2, \cdots, x_N)$. Schauen Sie sich jeweils an, wo das Maximum von L, ℓ_1 und ℓ_2 liegt, das liegt also immer so um die 5 herum, mal 4, mal 6, auch mal eine 10.

e) Generieren Sie jetzt nicht nur $N = 100$, sondern $N = 1000$ t_5-verteilte Zufallszahlen in (a) und wiederholen Sie die Schritte (b) und (c). Ihr Resultat für L und ℓ_1 sieht auf den ersten Blick etwas komisch aus, es gibt numerical issues. Machen Sie sich genau klar, was passiert.