Hochschule RheinMain SS 2021
Prof. Dr. D. Lehmann

6. Übungsblatt zur Vorlesung
Stochastik II

Aufgabe 1) Gegeben sei das Integral

$$I \;:=\; \int_{-1}^{2} e^{-x^2}\, dx$$

a) Berechnen Sie den numerischen Wert von I mit Hilfe einer Monte Carlo Simulation, indem Sie normalverteilte (aber nicht notwendig standard-normalverteilte) Zufallszahlen verwenden. Mit den Notationen und Definitionen von dem `week6a.pdf`, was genau ist F und was ist die Wahrscheinlichkeitsdichte p ?

b) Berechnen Sie den numerischen Wert von I mit Hilfe einer Monte Carlo Simulation, indem Sie uniforme oder gleichverteilte (aber nicht notwendig auf dem Intervall [0,1] gleichverteilte) Zufallszahlen benutzen. Was wäre in diesem Fall das F und die Wahrscheinlichkeitsdichte p ?

Ihre Resultate aus (a) und (b) sollten natürlich, bis auf random noise, übereinstimmen, also achten Sie auf eventuelle Vorfaktoren wie $1/\sqrt{\pi}$ oder $1/3$ (wo kommen die her?). Wenn Sie Ihr Ergebnis gegen eine exakte Formel gegenchecken wollen, könnten Sie auch noch versuchen, das I mit Hilfe der Funktion

$$\Phi(x) \;:=\; \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{y^2}{2}}\, \frac{dy}{\sqrt{2\pi}}$$

auszudrücken, das $\Phi(x)$ bekommen Sie in R mit der Syntax `pnorm(x)` .

Aufgabe 2) Überprüfen Sie für die Werte von, sagen wir, $n \in \{2,3,4,5,6,7,8\}$ die Formel

$$\int_{[0,1]^n} \chi\big(\, 0 \le x_1 + \cdots + x_n \le 1 \,\big)\, d^n x \;=\; \frac{1}{n!}$$

mit Hilfe einer Monte Carlo Simulation, indem Sie gleichverteilte Zufallszahlen verwenden. Die χ-Funktion oder Indikator-Funktion ist wie üblich definiert durch

$$\chi(A) \;=\; \begin{cases} 1 & \text{falls } A = true \\ 0 & \text{falls } A = false\,. \end{cases}$$

Mit den Notationen und Definitionen von dem `week6a.pdf`, was genau ist F und was ist die Wahrscheinlichkeitsdichte p ?

..bitte wenden

Aufgabe 3) Berechnen Sie die folgenden Integrale numerisch mit einer Monte Carlo Simulation:

a) $\int_{\mathbb{R}} \log(\phi^2)\, e^{-\frac{\phi^2}{2}}\, \frac{d\phi}{\sqrt{2\pi}}$

b) $\int_0^\infty (1+x+x^2+x^3+x^4)\, e^{-2x}\, dx$

c) $\int_0^{1/2} (1+x+x^2+x^3+x^4)\, e^{-2x}\, dx$

d) $\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 |x-y|\, dx\, dx$

Bemerkung: Bevor Sie die Sachen auf diesem Üblatt mit Monte Carlo berechnen können, müssen Sie meistens eine kleine Umformung machen, damit die Integrale auch wirklich von der Form

$$I \;=\; \int_{\mathbb{R}^n} F(\phi)\, p(\phi)\, d^n\phi$$

sind mit

$$\int_{\mathbb{R}^n} p(\phi)\, d^n\phi \;\stackrel{!}{=}\; 1$$

wie in dem `week6a.pdf` . Es wäre gut, wenn Sie sich diese kleine Umformung jeweils genau klar machen könnten. Also wenn das Integral über das p etwa keine 1 ergibt, sondern eine 3, dann kann man auch schreiben $F(\phi)\, p(\phi) = 3F(\phi)\, \frac{1}{3}p(\phi)$ und das $\frac{1}{3}p(\phi)$ wäre dann also die W'keitsdichte. Mit anderen Worten, das F bekommt dann einen zusätzlichen Faktor 3.