

3. Übungsblatt zur Vorlesung Stochastik II

Aufgabe 1: Eine Zufallsvariable oder Zufallszahl X heisst Poisson verteilt mit Parameter λ , wenn X nur Werte in den natürlichen Zahlen annehmen kann, und das mit den folgenden Wahrscheinlichkeiten:

$$\text{Prob}[X = k] = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} =: p_\lambda(k)$$

Zeigen Sie:

a) Der Erwartungswert von X ist dann gegeben durch

$$\text{E}[X] = \sum_{k=1}^{\infty} k \times \text{Prob}[X = k] = \sum_{k=1}^{\infty} k \times p_\lambda(k) \stackrel{\text{das ist zu zeigen}}{=} \lambda$$

b) Die Varianz ist gegeben durch

$$\text{V}[X] = \text{E}[X^2] - \text{E}[X]^2 = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \times p_\lambda(k) - \lambda^2 \stackrel{\text{das ist zu zeigen}}{=} \lambda .$$

Aufgabe 2: Es seien X und Y zwei unabhängige Poisson-verteilte Zufallsvariablen. X sei Poisson-verteilt mit Parameter λ und Y sei Poisson-verteilt mit Parameter μ . Beweisen Sie:

a) Es gilt

$$\text{Prob}[X + Y = n] = \frac{(\lambda + \mu)^n}{n!} e^{-(\lambda + \mu)}$$

Das heisst, $X + Y$ ist ebenfalls Poisson-verteilt, mit Parameter $\lambda + \mu$.

b) Folgern Sie mit Induktion: Sind X_1, X_2, \dots, X_n unabhängige, identisch Poisson-verteilte Zufallsvariablen mit Parameter $\lambda = 1$, dann ist

$$S_n := X_1 + X_2 + \dots + X_n$$

ebenfalls Poisson-verteilt, mit Parameter $\lambda = n$.

..bitte wenden

Aufgabe 3 (Stirlingsche Formel): Die Stirlingsche Formel ist eine Approximation für Fakultäten für grosse n und lautet:

$$n! \approx \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

oder genauer

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n} = 1$$

Man kann sie relativ einfach aus dem zentralen Grenzwertsatz ableiten: Betrachten Sie dazu die Summe $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ von Poisson-verteilten Zufallszahlen aus Aufgabe 2b, definieren Sie wie üblich die standardisierte Grösse

$$Z_n := \frac{S_n - \mathbf{E}[S_n]}{\sqrt{\mathbf{V}[S_n]}} = \frac{S_n - n}{\sqrt{n}}$$

und wenden Sie dann den zentralen Grenzwertsatz auf die Grösse

$$\mathbf{E}[\max(Z_n, 0)] \tag{1}$$

an. Das heisst, berechnen Sie den Erwartungswert in (1)

- (i) für festes n direkt mit Hilfe der Poisson-Verteilung, indem Sie den Erwartungswert als eine unendliche Reihe schreiben (die sich dann sehr stark vereinfachen lässt)
- (ii) im Limes $n \rightarrow \infty$, indem Sie den zentralen Grenzwertsatz anwenden und den Erwartungswert als ein Integral mit der Standard-Normalverteilung schreiben.

Aus der Gleichheit von (i) und (ii) im Limes $n \rightarrow \infty$ folgt dann nach etwas Umstellen die Stirlingsche Formel.