Hochschule RheinMain
Prof. Dr. D. Lehmann

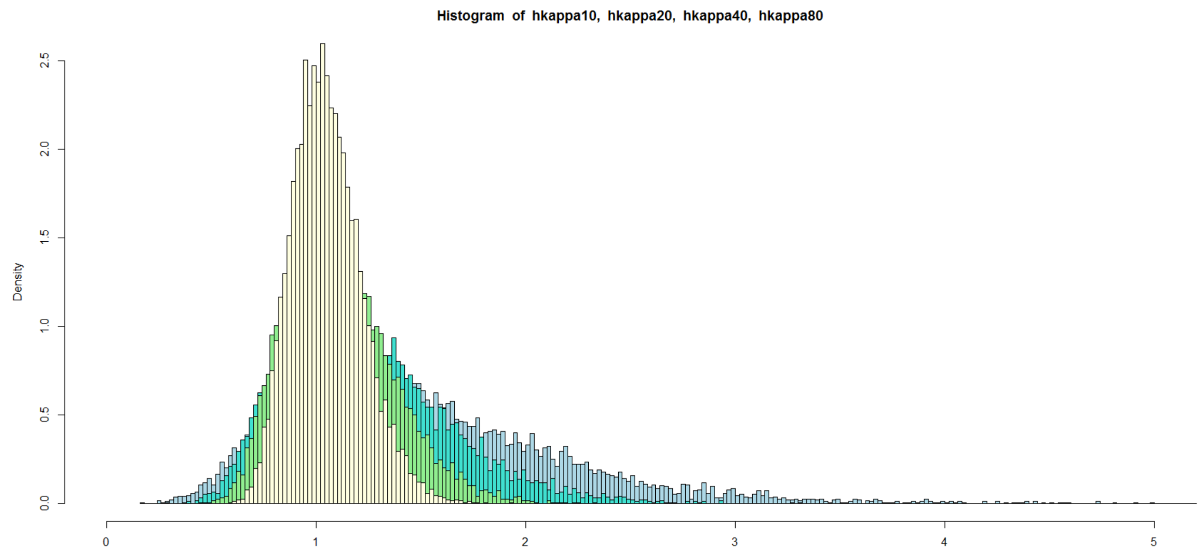
SS 2021

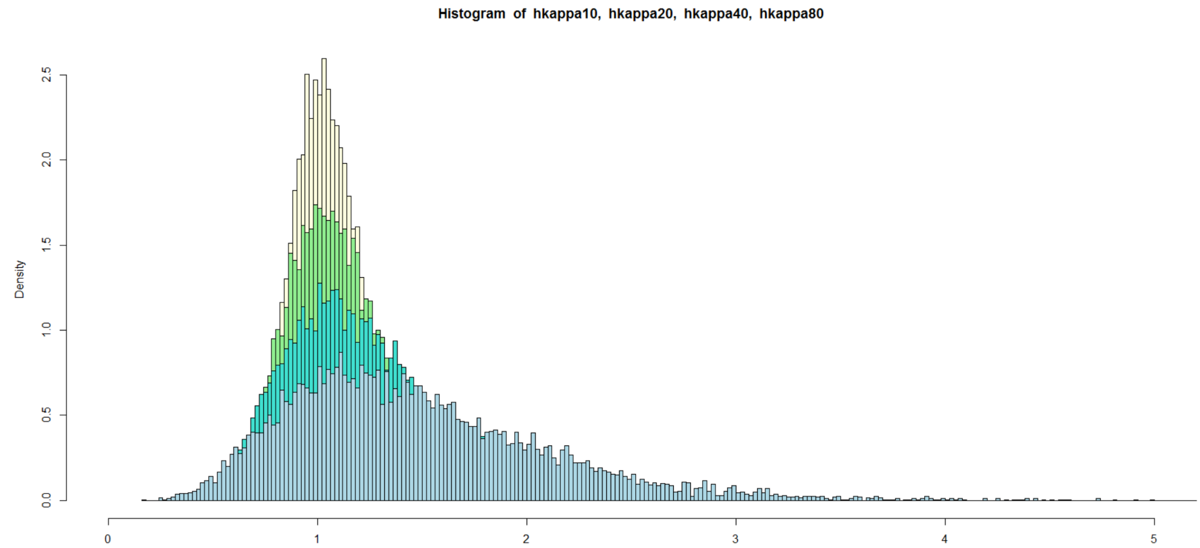
12. Übungsblatt zur Vorlesung
Stochastik II

Aufgabe 1) In der Vorlesung hatten wir die Cramer-Rao Abschätzung für das Beispiel 3, den zeitdiskreten Ornstein-Uhlenbeck Prozess, explizit hingeschrieben und waren auf die folgende Abschätzung für die Varianz von $\hat{\kappa}$ gekommen, wenn $\hat{\kappa}$ ein beliebiger erwartungstreuer Schätzer für den Modellparameter κ, das war die mean reversion speed, ist:

$$\mathsf{V}[\,\hat{\kappa}\,] \;\geq\; \frac{4\kappa^2}{2\kappa T - 1 + e^{-2\kappa T}} \;\stackrel{\kappa T \gg 1}{\approx}\; \frac{4\kappa^2}{2\kappa T} \;=\; \frac{2\kappa}{T} \tag{1}$$

Wenn der Zeithorizont T nach unendlich geht, geht die untere Schranke also nach 0. Das muss natürlich noch lange nicht bedeuten, dass die Varianz des Maximum-Likelihood-Schätzers $\hat{\kappa}_{\mathrm{ML}}$ ebenfalls nach 0 geht, zumal dieser Schätzer ja auch gar nicht erwartungstreu ist, aber das ist genau das, was passiert. Versuchen Sie dazu, die folgenden Bilder und Zahlen zu reproduzieren:





```
> summary(hkappa10)
   Min. 1st Qu.  Median    Mean 3rd Qu.    Max.
 0.1702  1.0200  1.3648  1.4700  1.8130  5.8170
> summary(hkappa20)
   Min. 1st Qu.  Median    Mean 3rd Qu.    Max.
 0.2895  0.9433  1.1630  1.2183  1.4348  3.7119
> summary(hkappa40)
   Min. 1st Qu.  Median    Mean 3rd Qu.    Max.
 0.4578  0.9248  1.0758  1.1020  1.2508  2.3265
> summary(hkappa80)
   Min. 1st Qu.  Median    Mean 3rd Qu.    Max.
 0.5855  0.9344  1.0379  1.0518  1.1558  1.9286
```

Für grosse T wird das $\hat{\kappa}_{\rm ML}$ also immer genauer. Es wurden im wesentlichen dieselben Parameterwerte wie in dem week7b.pdf gewählt, das waren:

$$\begin{aligned} (\kappa, \mu, \sigma) &= (1, 5, 1) \\ N &= 10000 \quad \text{Anzahl der Pfade} \end{aligned}$$

und hier jetzt

$$T \;\in\; \{\, 10\,,\, 20\,,\, 40\,,\, 80\,\}$$

wobei für jedes T immer dieselbe Anzahl von $n = 10000$ Zeitschritten, die Anzahl der dt's, genommen wurde, jeder Schätzer benutzt also exakt dieselbe Anzahl von $n = 10000$ Zeitreihendaten $\{x_{t_k}\}_{k=0}^n$.

Aufgabe 2) Im week10b.pdf hatten wir in der Folgerung 5.3.3 festgehalten, dass erwartungstreue Minimum-Varianz-Schätzer von der Form

$$\hat{\theta}(x) \;=\; \theta \;+\; I^{-1}(\theta)\, \nabla_\theta \log p_\theta(x) \tag{2}$$

sein müssen. Verifizieren Sie hier noch einmal durch explizite Rechnung

a) Es gilt tatsächlich

$$\mathsf{E}[\,\hat{\theta}_k\,] \;=\; \theta_k \tag{3}$$

b) Es gilt tatsächlich

$$\mathsf{V}[\,\hat{\theta}_k\,] \;=\; [I^{-1}(\theta)]_{k,k} \tag{4}$$

Erinnern Sie sich dazu an die Gleichungen (7) und (8) aus dem Beweis der Cramer-Rao Abschätzung in dem week10b.pdf .