Hochschule RheinMain
Prof. Dr. D. Lehmann SS 2021

# 11. Übungsblatt zur Vorlesung Stochastik II

**Aufgabe 1)** Im week7a.pdf hatten wir in dem Beispiel 2 unabhängige, mit Parameter $\lambda$ Poisson-verteilte Zufallszahlen $x_1, \cdots, x_n$ betrachtet und den Maximum Likelihood Schätzer für das $\lambda$ hergeleitet, der war gegeben durch

$$\hat{\lambda}_{\mathrm{ML}}(x_1, \cdots, x_n) \;=\; \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \;=\; \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \tag{1}$$

Zeigen Sie mit Hilfe der Cramer-Rao Abschätzung: Der Schätzer (1) ist effizient in der Menge aller erwartungstreuen Schätzer. Das heisst, das $\hat{\lambda}_{\mathrm{ML}}$ hat minimale Varianz in der Menge aller erwartungstreuen Schätzer $\tilde{\lambda}$ mit $\mathsf{E}[\tilde{\lambda}] = \lambda$. Gehen Sie dazu folgendermassen vor:

**a)** Zeigen Sie: $\mathsf{V}[\hat{\lambda}_{\mathrm{ML}}] = \frac{\lambda}{n}$ .

**b)** Berechnen Sie die Fisher-Informationsmatrix $I(\lambda)$. Das ist in diesem Fall einfach eine Zahl, also eine $1 \times 1$ Matrix.

**c)** Schreiben Sie die Cramer-Rao Abschätzung für diesen Fall hin.

**Aufgabe 2)** Im week10b.pdf hatten wir in der Folgerung 5.3.3 festgehalten, dass erwartungstreue Minimum-Varianz-Schätzer von der Form

$$\hat{\theta}(x) \;=\; \theta \;+\; I^{-1}(\theta)\, \nabla_\theta \log p_\theta(x) \tag{2}$$

sein müssen. Wir wollen noch einmal unser Standardbeispiel 1 betrachten mit unabhängigen, normalverteilten Zufallszahlen und Wahrscheinlichkeitsdichte oder Likelihood-Funktion (wir setzen $\nu := \sigma^2$)

$$p_\theta(x) \;=\; p_{\mu,\nu}(x_1, \cdots, x_n) \;=\; \prod_{i=1}^{n} \left\{ \tfrac{1}{\sqrt{2\pi\nu}}\, e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\nu}} \right\} \tag{3}$$

Zeigen Sie mit $\hat{\theta} = (\hat{\mu}, \hat{\nu})$:

**a)** Das $\hat{\mu}$ gegeben durch Gleichung (2) reduziert sich auf

$$\hat{\mu}(x_1, \cdots, x_n) \;=\; \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \tag{4}$$

Das ist also identisch mit dem Maximum Likelihood Schätzer und insbesondere unabhängig von den Modellparametern $\theta = (\mu, \nu)$.

**b)** Das $\hat{\nu}$ gegeben durch Gleichung (2) reduziert sich auf

$$\hat{\nu}(x_1, \cdots, x_n) \quad = \quad \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2 \tag{5}$$

und unterscheidet sich von dem Maximum Likelihood Schätzer nur dadurch, dass auf der rechten Seite von (5) der theoretische (unbekannte) Modellparameter $\mu$ in den Quadraten auftaucht, und nicht ein geschätztes $\mu$ mit $\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i/n$.

Das Berechnen von Schätzern mit Gleichung (2) kann also durchaus Sinn machen, wenn es darum geht, Ideen zu entwickeln, wie Modellparameter möglichst effizient geschätzt werden können.