Hochschule RheinMain | SS 2021
Prof. Dr. D. Lehmann

10. Übungsblatt zur Vorlesung
Stochastik II

Aufgabe 1) Wir betrachten die Maximum Likelihood Schätzer (oder die erwartungstreue Version davon) für den Mittelwert μ und die Varianz σ^2 von normalverteilten Zufallszahlen $x_1, \cdots, x_n$ gegeben durch

$$\hat{\mu}(x_1, \cdots, x_n) \;=\; \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \tag{1}$$

$$\widehat{s^2}(x_1, \cdots, x_n) \;=\; \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 \tag{2}$$

In der Vorlesung haben wir gezeigt:

a) $\hat{\mu}$ ist normalverteilt mit Mittelwert μ und Varianz $\frac{\sigma^2}{n}$.

b) $\widehat{s^2}$ ist im wesentlichen χ^2_{n-1}-verteilt. Genauer:

$$\mathsf{Prob}\Big[\, \widehat{s^2} \in [z, z+dz) \,\Big] \;=\; \tfrac{n-1}{\sigma^2} \times p_{\chi^2_{n-1}}\big(\tfrac{n-1}{\sigma^2}\, z\big)\, dz$$

wobei das $p_{\chi^2_{n-1}}$ die Dichte der χ^2-Verteilung mit $n-1$ Freiheitsgraden ist.

Verifizieren Sie die Aussagen (a) und (b) durch eine geeignete R-Simulation.

Aufgabe 2) Erzeugen Sie $N = 10000$ Zufallsvektoren

$$x \;=\; (x_1, \cdots, x_n) \;\in\; \mathbb{R}^n$$

wobei die x_i unabhängige, normalverteilte Zufallszahlen sind mit Mittelwert μ und Varianz σ^2. Wählen Sie die folgenden Werte,

$$\begin{aligned} \mu &= 20 \\ \sigma &= 4 \\ n &= 10 \end{aligned}$$

und speichern Sie Ihre insgesamt $N \times n$ Zufallszahlen in einer Matrix $X \in \mathbb{R}^{N\times n}$. Wir betrachten wieder den erwartungstreuen Schätzer $\widehat{s^2}$ für das σ^2 gegeben durch die Formel (2) aus Aufgabe 1 und können aus den simulierten x_i's dann $N = 10000$ realisierte Werte für das $\widehat{s^2}$ berechnen.

a) Berechnen Sie den realisierten Erwartungswert von $\widehat{s^2}$ und vergleichen Sie die Zahl mit dem theoretischen Wert σ^2.

b) Berechnen Sie den realisierten Erwartungswert von $\sqrt{\widehat{s^2}}$.

c) Das Convexity Adjustment war die Approximation

$$\mathsf{E}\big[\,F(x)\,\big] \;\approx\; F\big(\,\mathsf{E}[x]\,\big) \,+\, \frac{1}{2}\,F''\big(\,\mathsf{E}[x]\,\big)\,\mathsf{V}[x] \tag{3}$$

Wir wählen

$$\begin{aligned} x &:= \widehat{s^2}(x_1,\cdots,x_n) \\ F(x) &:= \sqrt{x} \end{aligned}$$

Zeigen Sie mit Hilfe der Formeln aus der Vorlesung: In diesem Fall reduziert sich (3) auf

$$\mathsf{E}\Big[\,\sqrt{\widehat{s^2}}\,\Big] \;\approx\; \sigma\,\times\,\big(1\,-\,\tfrac{1}{4(n-1)}\big) \tag{4}$$

Vergleichen Sie die rechte Seite von (4) mit dem realisierten Erwartungswert von $\sqrt{\widehat{s^2}}$ aus dem Teil (b).

d) Wenn wir also einen Schätzer für das σ (nicht für das σ^2) haben wollen, der auch für kleine Werte von n möglichst erwartungstreu sein soll, dann bietet sich das folgende Adjustment an:

$$\hat{s}_{\text{adj}} \;:=\; \big(1\,+\,\tfrac{1}{4n-5}\big)\,\times\,\sqrt{\widehat{s^2}(x_1,\cdots,x_n)} \tag{5}$$

Machen Sie sich klar, wo der Vorfaktor herkommt, und berechnen Sie dann nochmal den realisierten Erwartungswert von dem $\hat{s}_{\text{adj}}$.