

Lösungen zum 7. Übungsblatt Stochastik II

Aufgabe 1a) Die folgenden Integrale sind zu berechnen:

$$\begin{aligned} I_1 &:= \int_{\mathbb{R}^2} (x^2 + y^2) e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dx dy \\ I_2 &:= \int_{x^2+y^2 \leq 1} (x^2 + y^2) e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dx dy \\ I_3 &:= \int_{x^2+y^2+z^2 \leq 1} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{2}} dx dy dz \end{aligned}$$

Aus dem Kapitel 2 kennen wir die Integrale

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} &= 1 \\ \int_{\mathbb{R}} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} &= 1 \end{aligned}$$

Damit erhalten wir für I_1 :

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{\mathbb{R}^2} (x^2 + y^2) e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dx dy \\ &= 2\pi \int_{\mathbb{R}^2} (x^2 + y^2) e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} \frac{dy}{\sqrt{2\pi}} \\ &= 2\pi \int_{\mathbb{R}^2} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} e^{-\frac{y^2}{2}} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} \frac{dy}{\sqrt{2\pi}} + 2\pi \int_{\mathbb{R}^2} y^2 e^{-\frac{x^2}{2}} e^{-\frac{y^2}{2}} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} \frac{dy}{\sqrt{2\pi}} \\ &= 2\pi + 2\pi = 4\pi \end{aligned}$$

Für I_2 wählen wir Polarkoordinaten

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi \\ y &= r \sin \varphi \end{aligned}$$

Mit

$$dx dy = r dr d\varphi$$

bekommen wir

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{x^2+y^2 \leq 1} (x^2 + y^2) e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dx dy \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^2 e^{-\frac{r^2}{2}} r dr d\varphi \\ &= 2\pi \int_0^1 r^2 e^{-\frac{r^2}{2}} r dr \end{aligned}$$

Wir substituieren $v = r^2/2$, $dv = r dr$ und erhalten mit partieller Integration

$$\begin{aligned}
 I_2 &= 2\pi \int_0^1 r^2 e^{-\frac{r^2}{2}} r dr \\
 &= 2\pi \int_0^{1/2} 2v e^{-v} dv \\
 &= 4\pi \left\{ -v e^{-v} \Big|_0^{1/2} - \int_0^{1/2} 1 (-e^{-v}) dv \right\} \\
 &= 4\pi \left\{ -\frac{1}{2\sqrt{e}} + \int_0^{1/2} e^{-v} dv \right\} \\
 &= 4\pi \left\{ -\frac{1}{2\sqrt{e}} + 1 - \frac{1}{\sqrt{e}} \right\} \\
 &= 4\pi \left\{ 1 - \frac{3}{2\sqrt{e}} \right\}
 \end{aligned}$$

Für I_3 wählen wir Kugelkoordinaten

$$\begin{aligned}
 x &= r \cos \varphi \sin \theta \\
 y &= r \sin \varphi \sin \theta \\
 z &= r \cos \theta
 \end{aligned}$$

mit Volumenelement

$$dx dy dz = r^2 \sin \theta dr d\varphi d\theta$$

und $\varphi \in [0, 2\pi)$, $\theta \in [0, \pi)$. Wir bekommen dann für I_3

$$\begin{aligned}
 I_3 &= \int_{x^2+y^2+z^2 \leq 1} \sqrt{x^2+y^2+z^2} e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{2}} dx dy dz \\
 &= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^1 \sqrt{r^2} e^{-\frac{r^2}{2}} r^2 \sin \theta dr d\varphi d\theta \\
 &= 4\pi \int_0^1 r^2 e^{-\frac{r^2}{2}} r dr
 \end{aligned}$$

Das letzte Integral haben wir oben schon berechnet,

$$\int_0^1 r^2 e^{-\frac{r^2}{2}} r dr = 2 \left\{ 1 - \frac{3}{2\sqrt{e}} \right\}$$

und bekommen dann also

$$I_3 = 8\pi \left\{ 1 - \frac{3}{2\sqrt{e}} \right\}.$$