Hochschule RheinMain
Prof. Dr. D. Lehmann

SS 2020

9. Übungsblatt zur Vorlesung
Dynamik der Teilchen und Felder

1.Aufgabe: Wir definieren die sogenannten Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren oder auch Leiter-Operatoren a^+ und a durch

$$\begin{aligned} a &:= \tfrac{1}{\sqrt{2}}\big(\,\xi + \tfrac{d}{d\xi}\,\big) \\ a^+ &:= \tfrac{1}{\sqrt{2}}\big(\,\xi - \tfrac{d}{d\xi}\,\big) \end{aligned}$$

mit $\xi \in \mathbb{R}$. Weiterhin definieren wir die Funktion $h_0(\xi)$ durch

$$h_0(\xi) := \tfrac{1}{\pi^{\frac{1}{4}}}\, e^{-\frac{\xi^2}{2}}$$

so dass

$$a\, h_0 = 0$$

und

$$\langle h_0, h_0 \rangle = \int_{\mathbb{R}} |h_0(\xi)|^2\, d\xi = 1 \ .$$

Schliesslich definieren wir die Funktionen

$$h_n := \tfrac{1}{\sqrt{n!}}\, (a^+)^n\, h_0 \ .$$

Zeigen Sie:

a) Wir haben den Kommutator

$$[a, a^+] = 1 \ .$$

b) Für beliebige natürliche Zahlen $n \geq 1$ haben wir die Kommutatoren

$$\big[\, a\,,\, (a^+)^n \,\big] = n\, (a^+)^{n-1} \ .$$

c) Mit der Definition $h_{-1} := 0$ gilt für beliebige natürliche Zahlen $n \geq 0$

$$\begin{aligned} a\, h_n &= \sqrt{n}\ h_{n-1} \\ a^+ h_n &= \sqrt{n+1}\ h_{n+1} \end{aligned}$$

und

$$a^+ a\, h_n = n\, h_n \ .$$

..bitte wenden

d) Die $\{h_n\}_{n=0}^{\infty}$ sind ein orthonormales Funktionensystem. Das heisst, es gilt für beliebige natürliche Zahlen $n, m \geq 0$:

$$\langle h_m, h_n \rangle \;=\; \delta_{m,n} \;\; .$$

e) Nur zur Info, das sollen Sie jetzt nicht beweisen[1]: Das Funktionensystem der $\{h_n\}_{n=0}^{\infty}$ ist vollständig in $L^2(\mathbb{R})$. Das heisst, jedes beliebige $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ besitzt die Entwicklung

$$\psi(\xi) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} c_n \, h_n(\xi)$$

mit Entwicklungskoeffizienten

$$c_n \;=\; \langle \psi, h_n \rangle \;=\; \int_{\mathbb{R}} \psi(\xi) \overline{h_n(\xi)} \, d\xi \;\; .$$

f) Die Hermite-Polynome $H_n(\xi)$ sind definiert durch die Rekursion

$$\begin{aligned} H_0(\xi) &:= 1 \\ H_{n+1}(\xi) &:= 2\xi \, H_n(\xi) \, - \, H_n'(\xi) \; . \end{aligned}$$

Zeigen Sie: Die h_n's lassen sich dann folgendermassen schreiben:

$$h_n(\xi) \;=\; \frac{1}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}} \, H_n(\xi) \, e^{-\frac{\xi^2}{2}} \;\; .$$

[1] derartige Dinge werden typischerweise in einer Funktionalanalysis-Vorlesung bewiesen