Hochschule RheinMain
Prof. Dr. D. Lehmann SS 2020

7. Übungsblatt zur Vorlesung
Dynamik der Teilchen und Felder

1.Aufgabe: Wir betrachten die kräftefreie Bewegung eines Teilchens im $\mathbb{R}^3$ in Kugelkoordinaten,

$$\vec{x} \;=\; \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \;=\; r \begin{pmatrix} \cos\varphi\,\sin\theta \\ \sin\varphi\,\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

mit $r \in [0, +\infty)$, $\varphi \in [0, 2\pi)$ und $\theta \in [0, \pi]$. In der Vorlesung haben wir in dem `week3.pdf` in Gleichung (9) den folgenden Ausdruck für die Lagrange-Funktion $L = T - V = T - 0 = T$ hergeleitet:

$$L \;=\; \tfrac{m}{2}\,\dot{\vec{x}}^2 \;=\; \tfrac{m}{2}\left\{ \dot{r}^2 \;+\; r^2\dot{\varphi}^2\sin^2\theta \;+\; r^2\dot{\theta}^2 \right\} \tag{1}$$

Wir wählen also

$$(q, \dot{q}) \;=\; (r, \varphi, \theta, \dot{r}, \dot{\varphi}, \dot{\theta}) \tag{2}$$

als die verallgemeinerten Koordinaten.

a) Berechnen Sie die verallgemeinerten Impulse $(p_r, p_\varphi, p_\theta)$.

b) Berechnen Sie die Hamilton-Funktion $H = H(r, \varphi, \theta, p_r, p_\varphi, p_\theta)$.

c) Stellen Sie die Hamiltonschen Gleichungen auf.

d) Zeigen Sie, dass die Hamiltonschen Gleichungen aus Teil (c) äquivalent sind zum System (11) aus dem `week3.pdf`, das waren die Gleichungen

$$\begin{aligned} \ddot{r} \;-\; r\dot{\varphi}^2\sin^2\theta \;-\; r\dot{\theta}^2 \;&=\; 0 \\ \tfrac{d}{dt}\left\{ r^2\dot{\varphi}\sin^2\theta \right\} \;&=\; 0 \\ \tfrac{d}{dt}\left\{ r^2\dot{\theta} \right\} \;-\; r^2\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta \;&=\; 0\,. \end{aligned} \tag{3}$$

2.Aufgabe: Beweisen Sie das Theorem 3.1.3 aus der Vorlesung, aus dem `week7.pdf`, das war die folgende Aussage: Es sei $L = T - V$ die Lagrange-Funktion eines mechanischen Systems und die kinetische Energie T und die potentielle Energie V seien von der Form[1]

$$T \;=\; T(q, \dot{q}) \;=\; \sum_{j,k=1}^{f} \dot{q}_j\dot{q}_k\, t_{jk}(q) \tag{4}$$

mit $t_{jk}(q) = t_{kj}(q)$ und die potentielle Energie hänge nur von den q's ab, aber nicht von den $\dot{q}$. Also

$$V \;=\; V(q) \;=\; V(q_1, \cdots, q_f) \tag{5}$$

Dann gilt: Die Hamilton-Funktion H ist gegeben durch die Gesamtenergie, es ist

$$H \;=\; T + V\,. \tag{6}$$

[1] auf diese Form waren wir in dem `week4.pdf` in Gleichung (20) gekommen