Hochschule RheinMain
Prof. Dr. D. Lehmann SS 2020

4. Übungsblatt zur Vorlesung
Dynamik der Teilchen und Felder

1.Aufgabe: Wir betrachten die Bewegung eines kleinen Kügelchens der Masse m auf einem Kegel K unter dem Einfluss der Schwerkraft $\vec{F} = (0, 0, -mg)$. Der Kegel habe die Parametrisierung

$$K \;=\; \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \vec{x} \,=\, \vec{x}(r,\varphi) \;=\; \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ c\,r \end{pmatrix}, \;\; (r,\varphi) \in [0,R] \times [0,2\pi) \right\}$$

wobei c eine positive Konstante ist.

a) Wählen Sie (r, φ) als verallgemeinerte Koordinaten und geben Sie die Lagrange-Funktion an.

b) Leiten Sie die Bewegungsgleichungen[1] für r und φ her.

2.Aufgabe: Wir betrachten das Doppelpendel so wie es in Beispiel 2 in `week4.pdf` spezifiziert ist. Schauen Sie sich dazu insbesondere noch einmal die Abbildung auf Seite 3 an. Wählen Sie dann φ_1 und φ_2 als die verallgemeinerten Koordinaten.

a) Zeigen Sie, dass die Lagrange-Funktion durch folgenden Ausdruck gegeben ist:

$$\begin{aligned} L \;=\; & \tfrac{m_1+m_2}{2}\,\ell_1^2\,\dot\varphi_1^2 \;+\; \tfrac{m_2}{2}\,\ell_2^2\,\dot\varphi_2^2 \;+\; m_2\,\ell_1\ell_2\,\dot\varphi_1\dot\varphi_2\,\cos(\varphi_1-\varphi_2) \\ & + (m_1+m_2)g\,\ell_1\,\cos\varphi_1 \;+\; m_2 g\,\ell_2\,\cos\varphi_2 \;\;. \end{aligned}$$

b) Zeigen Sie, dass sich die Bewegungsgleichungen auf die folgende Form bringen lassen:

$$\begin{aligned} \left(1+\tfrac{m_1}{m_2}\right)\ell_1\,\ddot\varphi_1 \;+\; \ell_2\,\ddot\varphi_2\,\cos(\varphi_1-\varphi_2) \;+\; \ell_2\,\dot\varphi_2^2\,\sin(\varphi_1-\varphi_2) \;+\; \left(1+\tfrac{m_1}{m_2}\right)g\,\sin\varphi_1 \;&=\; 0 \\ \ell_2\,\ddot\varphi_2 \;+\; \ell_1\,\ddot\varphi_1\,\cos(\varphi_1-\varphi_2) \;-\; \ell_1\,\dot\varphi_1^2\,\sin(\varphi_1-\varphi_2) \;+\; g\,\sin\varphi_2 \;&=\; 0 \;\;. \end{aligned}$$

Konzeptionell ist Aufgabe 2 wie Aufgabe 1, allerdings deutlich rechenaufwändiger. Wir rechnen sie in der nächsten Vorlesung vor. Wir werden da das linearisierte Doppelpendel diskutieren und etwas allgemeiner Systeme von n gekoppelten Oszillatoren betrachten.

[1] 'die Bewegungsgleichungen' meint dasselbe wie 'die Euler-Lagrange-Gleichungen'