Hochschule RheinMain
Prof. Dr. D. Lehmann SS 2020

3. Übungsblatt zur Vorlesung
Dynamik der Teilchen und Felder

1.Aufgabe: Wir parametrisieren die Bewegung eines Teilchens der Masse m im $\mathbb{R}^3$ durch Kugelkoordinaten,

$$\vec{x} \;=\; \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \;=\; r \begin{pmatrix} \cos\varphi\,\sin\theta \\ \sin\varphi\,\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

mit $r \in [0, +\infty)$, $\varphi \in [0, 2\pi)$ und $\theta \in [0, \pi]$. Wir führen folgende Basisvektoren ein:

$$\vec{e}_r \;:=\; \begin{pmatrix} \cos\varphi\,\sin\theta \\ \sin\varphi\,\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_\varphi \;:=\; \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_\theta \;:=\; \begin{pmatrix} \cos\varphi\,\cos\theta \\ \sin\varphi\,\cos\theta \\ -\sin\theta \end{pmatrix}$$

Der Bahndrehimpuls ist definiert durch den Vektor[1]

$$\vec{L} \;:=\; \vec{x} \times \vec{p} \;=\; m\,\vec{x} \times \dot{\vec{x}}$$

Zeigen Sie:

a) Für eine kräftefreie Bewegung $m\ddot{\vec{x}} = 0$ wie wir sie in Beispiel 1 von `week3.pdf` betrachtet haben, gilt

$$\tfrac{d}{dt}\,\vec{L} \;=\; \vec{0}\,,$$

das heisst, $\vec{L}$ ist eine Erhaltungsgrösse.

b) Für eine Bewegung unter dem Einfluss der Schwerkraft $\vec{F} = (0, 0, -mg)$ und einer Zwangskraft der Form $\vec{Z} = \lambda\,\vec{e}_r$ gilt nicht mehr $\frac{d}{dt}\,\vec{L} = \vec{0}$, aber es gilt noch

$$\tfrac{d}{dt}\,L_3 \;=\; 0$$

wobei L_3 die z-Komponente des Drehimpulses $\vec{L} = (L_1, L_2, L_3)$ ist.

c) In Kugelkoordinaten gilt

$$\vec{L} \;=\; m\,r^2\,\left\{\,\dot{\theta}\,\vec{e}_\varphi \;-\; \dot{\varphi}\,\sin\theta\,\vec{e}_\theta\,\right\}$$

und

$$L_3 \;=\; m\,r^2\,\dot{\varphi}\,\sin^2\theta\,.$$

[1] das $\vec{L}$ für den Bahndrehimpuls bitte nicht verwechseln mit dem L für die Lagrange-Funktion

2.Aufgabe: Wir betrachten die Bewegung eines Kügelchens der Masse m unter dem Einfluss der Schwerkraft in einer halbkugelförmigen Schüssel. In Beispiel 2 von `week3.pdf` hatten wir dazu die Bewegung durch Kugelkoordinaten parametrisiert,

$$\vec{x}_t \;=\; \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \\ z_t \end{pmatrix} \;=\; R \begin{pmatrix} \cos\varphi_t \, \sin\theta_t \\ \sin\varphi_t \, \sin\theta_t \\ \cos\theta_t \end{pmatrix}$$

wobei R jetzt der konstante Radius der Schüssel ist, und wir hatten mit Hilfe des Lagrange-Formalismus die folgenden Bewegungsgleichungen hergeleitet:

$$\tfrac{d}{dt}\left\{ \dot{\varphi} \sin^2\theta \right\} \;=\; 0 \tag{1}$$

$$\ddot{\theta} \;-\; \dot{\varphi}^2 \sin\theta \cos\theta \;-\; \tfrac{g}{R} \sin\theta \;=\; 0 \tag{2}$$

a) Wie müssen die Anfangsbedingungen gewählt werden, wenn sich das Kügelchen auf horizontalen Kreisen bewegen soll? Versuchen Sie, alle solche möglichen Anfangsbedingungen zu charakterisieren.

b) Für $\dot{\varphi} = 0$ können wir die Bewegung auch als die eines ebenen Fadenpendels mit der Pendellänge R auffassen. Die Ruheposition des Pendels bedindet sich bei $\vec{x} = (0, 0, -R)$ oder $\theta = \pi$. Substituieren Sie $\theta = \pi - \alpha$ und betrachten Sie den Fall kleiner Auslenkungen α, so dass die Näherung $\sin\alpha \approx \alpha$ gerechtfertigt ist. Geben Sie für diesen Fall die Bewegungsgleichung für α an sowie die allgemeine Lösung.

(Das ist dann natürlich der harmonische Oszillator und das werden Sie schon häufiger im Studium gemacht haben; da wir die Sachen im 3.Kapitel nochmal brauchen, klassisch und quantenmechanisch, harmonisch und anharmonisch, ist hier vielleicht eine ganz gute Gelegenheit, sich nochmal daran zu erinnern, falls man das nicht mehr so präsent hat.)