Hochschule RheinMain
Prof. Dr. D. Lehmann SS 2020

11. Übungsblatt zur Vorlesung
Dynamik der Teilchen und Felder

1.Aufgabe: Gegeben seien die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren a^+ und a wie in Üblatt 9 durch

$$\begin{aligned} a &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}\big(\,\xi + \tfrac{d}{d\xi}\,\big) \\ a^+ &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}\big(\,\xi - \tfrac{d}{d\xi}\,\big) \end{aligned}$$

Wir haben den Kommutator

$$[a, a^+] = 1$$

und mit der einfachen Version der Baker-Campbell-Hausdorff Formel aus der 2. Aufgabe vom Üblatt 10 oder aus dem Theorem 3.2.3 aus der Vorlesung gilt für beliebiges $\lambda \in \mathbb{R}$

$$e^{\lambda(a^+ + a)} = e^{\frac{\lambda^2}{2}}\, e^{\lambda a^+}\, e^{\lambda a} \tag{1}$$

Wenn wir die linke und die rechte Seite von (1) nach Potenzen von λ entwickeln und dann die Koeffizienten von λ^m vergleichen, erhalten wir die folgende Formel:

$$(a^+ + a)^m = \sum_{k=0}^{[m/2]} \frac{m!}{2^k k!} \sum_{j=0}^{m-2k} \frac{(a^+)^{m-2k-j}\, a^j}{(m-2k-j)!\, j!} \tag{2}$$

Der Nutzen dieser Formel besteht darin, dass auf der rechten Seite von (2) die a^+ immer links von den a's stehen.

a) Überprüfen Sie die Formel für den Fall $m = 2$, indem Sie die linke und die rechte Seite von (2) explizit ausschreiben.

b) Zeigen Sie mit Hilfe von (2): Es gilt die Formel

$$\begin{aligned} (a^+ + a)^4 = {} & (a^+)^4 + 4(a^+)^3 a + 6(a^+)^2 a^2 + 4a^+ a^3 + a^4 \\ & + 6(a^+)^2 + 12 a^+ a + 6a^2 + 3 \ . \end{aligned}$$

c) Zeigen Sie jetzt mit Hilfe von Teil (b) die Aussage von Lemma 3.2.5 aus der Vorlesung:

$$(a^+ + a)^4 = (a^+)^4 + (a^+)^2\,(4\hat{n} + 6) + a^2\,(4\hat{n} - 2) + a^4 + 6\,\hat{n}\,(\hat{n} + 1) + 3$$

mit $\hat{n} := a^+ a$.