Hochschule RheinMain
Prof. Dr. D. Lehmann SS 2020

1. Übungsblatt zur Vorlesung
Dynamik der Teilchen und Felder

1.Aufgabe: Schauen Sie sich auf der Seite 3 von `week1.pdf` die Gleichungen (1.8) und (1.9) an, die Gleichung (1.9) folgt aus (1.8). Die Rechnung dazu ist in `week1.pdf` aber nicht angegeben. Machen Sie diese Rechnung. Multiplizieren Sie dazu die Gleichung (1.8) mit $\dot{x}(t)$ und benutzen Sie die Identität

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{m\,\dot{x}^2}{2}\right\} \;=\; m\,\ddot{x}\,\dot{x}\;.$$

Durch welchen Ausdruck ist E gegeben?

2.Aufgabe: Wir wollen die Schwerkraft $F = mg$, mit $g = 9.81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ die Erdbeschleunigung, aus dem Newtonschen Gravitationsgesetz

$$\vec{F}_{21} \;=\; -Gm_1m_2\,\frac{\vec{x}_2-\vec{x}_1}{\|\vec{x}_2-\vec{x}_1\|^3} \tag{1}$$

herleiten. Dabei ist $\vec{F}_{21}$ die Kraft, die von der Punktmasse m_1 auf die Punktmasse m_2 ausgeübt wird und

$$G \;=\; 6.674\times 10^{-11}\,\frac{\mathrm{Nm}^2}{\mathrm{kg}^2}$$

ist die Gravitationskonstante. Wir betrachten den Fall mit $m_1 = M =$ Erdmasse und $m_2 = m$ ist eine Probemasse, die etwa in einem Labor auf einem Tisch liegt. Wir können $m_1 = M$ nicht mehr als Punktmasse ansehen und schreiben deshalb

$$M \;=\; \int dM \;=\; \int \rho\, d^3x$$

wobei ρ die Dichte der Erde ist, die wir als konstant annehmen wollen. Aus Gleichung (1) wird dann mit $\vec{x}_2 =: \vec{x}$

$$\vec{F}(\vec{x}) \;=\; \int d\vec{F} \;=\; -Gm\rho\int_{\mathrm{Erde}} d^3x_1\,\frac{\vec{x}-\vec{x}_1}{\|\vec{x}-\vec{x}_1\|^3} \tag{2}$$

Wir nehmen an, dass die Erde eine Kugel mit Radius

$$R \;=\; 6371\,\mathrm{km}$$

ist, aus Symmetriegründen hängt die Kraft $\vec{F}$ in (2) dann nur von $r := \|\vec{x}\|$ ab, $\vec{F} = \vec{F}(r)$, wenn wir den Mittelpunkt von M in den Koordinatenursprung legen.

a) Es sei $F(r) = |\vec{F}(r)|$. Zeigen Sie: Für $r \geq R$ gilt

$$F(r) \;=\; Gm\rho\,\frac{4\pi}{3}R^3 \times \frac{1}{r^2} \;=\; Gm\,\frac{M}{r^2} \tag{3}$$

Im Fall $r \geq R$ kann man sich also doch die Erde als Punktmasse M im Koordinatenursprung $\vec{x}_1 = \vec{0}$ vorstellen, die Gleichung (1) liefert dann dasselbe Resultat.

b) Die Probemasse $m = m_2$ befinde sich jetzt in einer Höhe h über der Erdoberfläche, etwa $h = 1\text{m}$. Wir betrachten also den Fall $r = R + h$ mit $h \ll R$. Zeigen Sie:

$$\begin{aligned} F(r) &\approx Gm\,\frac{M}{R^2}\left[1 - 2\frac{h}{R}\right] \\ &\approx Gm\,\frac{M}{R^2} \;=\; g\,m \end{aligned} \tag{4}$$

mit

$$g \;=\; G\,\frac{M}{R^2} \;\approx\; 9.82\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\,.$$

Die Erdmasse beträgt

$$M \;=\; 5.9722 \times 10^{24}\,\text{kg}\,.$$

3.Aufgabe: Schauen Sie sich auf den letzten beiden Seiten 4 und 5 von `week1.pdf` die Rechnung zur Schwingungsperiode eines anharmonischen Oszillators an. Diese Rechnung ist interessant, weil man die Schwingungsperiode näherungsweise berechnen kann, ohne dazu die Bewegungsgleichung explizit lösen zu müssen. In der Rechnung gibt es ein paar Näherungsformeln für x^2, für x und für dx. Erklären Sie genau, wie man auf diese Näherungen kommt.