Lösungen zum 9. Übungsblatt
Dynamik der Teilchen und Felder

1.Aufgabe: a) Es ist

$$\begin{aligned}
aa^+ &= \tfrac{1}{2}\big(\xi + \tfrac{d}{d\xi}\big)\big(\xi - \tfrac{d}{d\xi}\big) \\
&= \tfrac{1}{2}\big\{\xi^2 - \tfrac{d^2}{d\xi^2} - \xi\tfrac{d}{d\xi} + \tfrac{d}{d\xi}\xi\big\} \\
&= \tfrac{1}{2}\big\{\xi^2 - \tfrac{d^2}{d\xi^2} - \xi\tfrac{d}{d\xi} + 1 + \xi\tfrac{d}{d\xi}\big\} \\
&= \tfrac{1}{2}\big\{\xi^2 - \tfrac{d^2}{d\xi^2} + 1\big\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a^+a &= \tfrac{1}{2}\big(\xi - \tfrac{d}{d\xi}\big)\big(\xi + \tfrac{d}{d\xi}\big) \\
&= \tfrac{1}{2}\big\{\xi^2 - \tfrac{d^2}{d\xi^2} + \xi\tfrac{d}{d\xi} - \tfrac{d}{d\xi}\xi\big\} \\
&= \tfrac{1}{2}\big\{\xi^2 - \tfrac{d^2}{d\xi^2} + \xi\tfrac{d}{d\xi} - 1 - \xi\tfrac{d}{d\xi}\big\} \\
&= \tfrac{1}{2}\big\{\xi^2 - \tfrac{d^2}{d\xi^2} - 1\big\}
\end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned}
[a, a^+] &= aa^+ - a^+a \\
&= \tfrac{1}{2}\big\{\xi^2 - \tfrac{d^2}{d\xi^2} + 1\big\} - \tfrac{1}{2}\big\{\xi^2 - \tfrac{d^2}{d\xi^2} - 1\big\} \\
&= \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} = 1
\end{aligned}$$

b) Beweis mit Induktion: Für $n = 1$ reduziert sich die Aussage auf Teil (a). Die Formel gelte für n,

$$\big[\, a\,,\, (a^+)^n \,\big] = n\,(a^+)^{n-1} \quad . \tag{1}$$

Wir bekommen dann für $n + 1$

$$\begin{aligned}
\big[\, a\,,\, (a^+)^{n+1} \,\big] &= a(a^+)^{n+1} - (a^+)^{n+1}a \\
&= a(a^+)^n a^+ - (a^+)^n a^+ a \\
&= a(a^+)^n a^+ - (a^+)^n aa^+ + (a^+)^n aa^+ - (a^+)^n a^+ a \\
&= \big\{a(a^+)^n - (a^+)^n a\big\}a^+ + (a^+)^n\big\{aa^+ - a^+a\big\} \\
&= \big[\, a\,,\, (a^+)^n \,\big]a^+ + (a^+)^n \times [a, a^+] \\
&\overset{(1),(a)}{=} n\,(a^+)^{n-1}a^+ + (a^+)^n \times 1 \\
&= (n+1)\,(a^+)^n
\end{aligned}$$

und die Formel ist auch für $n + 1$ bewiesen.

c) Mit der Definition

$$h_n \;:=\; \tfrac{1}{\sqrt{n!}}\,(a^+)^n\,h_0$$

und dem Kommutator aus Teil (b) bekommen wir

$$\begin{aligned}
a\,h_n &= \tfrac{1}{\sqrt{n!}}\,a(a^+)^n\,h_0 \\
&= \tfrac{1}{\sqrt{n!}}\left\{a(a^+)^n\,-(a^+)^n a\right\}h_0\;+\;(a^+)^n a\,h_0 \\
&= \tfrac{1}{\sqrt{n!}}\left[\,a\,,\,(a^+)^n\,\right]h_0\;+\;0 \\
&= \tfrac{1}{\sqrt{n!}}\,n\,(a^+)^{n-1}\,h_0\;+\;0 \\
&= \tfrac{1}{\sqrt{(n-1)!}}\,\sqrt{n}\,(a^+)^{n-1}\,h_0 \\
&= \sqrt{n}\;h_{n-1}
\end{aligned}$$

Weiterhin,

$$\begin{aligned}
a^+\,h_n &= a^+\tfrac{1}{\sqrt{n!}}\,(a^+)^n\,h_0 \\
&= \sqrt{n+1}\;\tfrac{1}{\sqrt{(n+1)!}}\,(a^+)^{n+1}\,h_0 \\
&= \sqrt{n+1}\;\;h_{n+1}
\end{aligned}$$

und damit

$$a^+a\,h_n \;=\; a^+\sqrt{n}\;h_{n-1} \;=\; \sqrt{n}\,\sqrt{n}\;h_n \;=\; n\,h_n\;\;.$$

d) Mit dem Skalarprodukt[1]

$$\langle f,g\rangle \;:=\; \textstyle\int_{\mathbb{R}} f(\xi)\overline{g(\xi)}\,d\xi$$

gilt

$$\langle af,g\rangle \;=\; \langle f,a^+g\rangle$$

denn

$$\begin{aligned}
\langle af,g\rangle \;=\; \textstyle\int_{\mathbb{R}}(af)(\xi)\overline{g(\xi)}\,d\xi \;&=\; \tfrac{1}{\sqrt{2}}\textstyle\int_{\mathbb{R}}(\xi+\tfrac{d}{d\xi})f(\xi)\overline{g(\xi)}\,d\xi \\
&\overset{\text{part.Int.}}{=}\; \tfrac{1}{\sqrt{2}}\textstyle\int_{\mathbb{R}} f(\xi)\,(\xi-\tfrac{d}{d\xi})\overline{g(\xi)}\,d\xi \\
&=\; \tfrac{1}{\sqrt{2}}\textstyle\int_{\mathbb{R}} f(\xi)\overline{(\xi-\tfrac{d}{d\xi})g(\xi)}\,d\xi \;=\; \langle f,a^+g\rangle
\end{aligned}$$

wobei wir also bei der partiellen Integration benutzt haben, dass die Funktionen f und g im Unendlichen verschwinden, so dass die Randterme 0 sind. Damit bekommen wir für Indizes m,n mit, sagen wir, $m\geq n$:

$$\langle h_m,h_n\rangle \;=\; \tfrac{1}{\sqrt{m!}}\,\tfrac{1}{\sqrt{n!}}\;\times\;\Big\langle\,(a^+)^m h_0\;,\;(a^+)^n h_0\,\Big\rangle \tag{2}$$

mit

[1] die komplexe Konjugation im 2.Argument, bei dem g, könnten wir an dieser Stelle auch weglassen, da die h_n's alle reell sind; quantenmechanische Wellenfunktionen sind aber typischerweise komplexe Funktionen

$$
\begin{aligned}
\Big\langle (a^+)^m h_0 \,,\, (a^+)^n h_0 \Big\rangle &= \Big\langle (a^+)^{m-1} h_0 \,,\, a(a^+)^n h_0 \Big\rangle \\
&\overset{a\,h_0=0}{=} \Big\langle (a^+)^{m-1} h_0 \,,\, [a,(a^+)^n] h_0 \Big\rangle \\
&\overset{\text{Teil(b)}}{=} \Big\langle (a^+)^{m-1} h_0 \,,\, n(a^+)^{n-1} h_0 \Big\rangle \\
&= n \Big\langle (a^+)^{m-1} h_0 \,,\, (a^+)^{n-1} h_0 \Big\rangle
\end{aligned}
$$

Das können wir n-mal wiederholen und bekommen

$$
\begin{aligned}
\Big\langle (a^+)^m h_0 \,,\, (a^+)^n h_0 \Big\rangle &= n \Big\langle (a^+)^{m-1} h_0 \,,\, (a^+)^{n-1} h_0 \Big\rangle \\
&= n(n-1) \Big\langle (a^+)^{m-2} h_0 \,,\, (a^+)^{n-2} h_0 \Big\rangle \\
&\vdots \\
&= n! \Big\langle (a^+)^{m-n} h_0 \,,\, (a^+)^{n-n} h_0 \Big\rangle \\
&= n! \Big\langle (a^+)^{m-n} h_0 \,,\, h_0 \Big\rangle
\end{aligned}
$$

Ist $m-n > 0$, können wir noch ein a^+ mit einem a auf die rechte Seite bringen und erhalten $ah_0 = 0$. Und für $m = n$ erhalten wir

$$
\Big\langle (a^+)^n h_0 \,,\, (a^+)^n h_0 \Big\rangle = n! \,\big\langle h_0 \,,\, h_0 \big\rangle = n!
$$

Mit dem Vorfaktor in (2),

$$
\tfrac{1}{\sqrt{m!}} \tfrac{1}{\sqrt{n!}} \overset{m=n}{=} \tfrac{1}{n!}
$$

folgt dann also die Orthonormalität der h_n.

f) Wegen

$$
h_n = \tfrac{1}{\sqrt{n!}} (a^+)^n \, h_0
$$

ist die Formel

$$
h_n(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}} \, H_n(\xi) \, e^{-\frac{\xi^2}{2}}
$$

äquivalent zu

$$
\big(\xi - \tfrac{d}{d\xi}\big)^n h_0 = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{\pi}}} \, H_n(\xi) \, e^{-\frac{\xi^2}{2}}
$$

oder

$$
\big(\xi - \tfrac{d}{d\xi}\big)^n e^{-\frac{\xi^2}{2}} = H_n(\xi) \, e^{-\frac{\xi^2}{2}} \tag{3}
$$

Für $n = 0$ ist Formel (3) offensichtlich korrekt, es ist $H_0(\xi) = 1$. Formel (3) gelte für n. Dann:

$$
\begin{aligned}
\left(\xi - \tfrac{d}{d\xi}\right)^{n+1} e^{-\frac{\xi^2}{2}} &= \left(\xi - \tfrac{d}{d\xi}\right)\left\{ H_n(\xi) e^{-\frac{\xi^2}{2}} \right\} \\
&= \xi\, H_n(\xi) e^{-\frac{\xi^2}{2}} - \tfrac{d}{d\xi}\left\{ H_n(\xi) e^{-\frac{\xi^2}{2}} \right\} \\
&= \xi\, H_n(\xi) e^{-\frac{\xi^2}{2}} - H_n'(\xi) e^{-\frac{\xi^2}{2}} + H_n(\xi)\, \xi\, e^{-\frac{\xi^2}{2}} \\
&= \left[2\xi\, H_n(\xi) - H_n'(\xi) \right] e^{-\frac{\xi^2}{2}} \\
&= H_{n+1}(\xi)\, e^{-\frac{\xi^2}{2}}
\end{aligned}
$$

wobei wir in der letzten Zeile die Rekursionsgleichung für die Hermite-Polynome

$$
H_{n+1}(\xi) \;:=\; 2\xi\, H_n(\xi) - H_n'(\xi)
$$

benutzt haben. Damit ist auch der Teil (f) bewiesen.