Hochschule RheinMain
Prof. Dr. D. Lehmann SS 2020

Lösungen zum 6. Übungsblatt
Dynamik der Teilchen und Felder

1.Aufgabe: **a)** Wir haben

$$\begin{aligned} L &= T - V \\ &= \tfrac{m}{2}\,\dot{\vec{x}}^{\,2} - mg\,z \\ &= \tfrac{m}{2}\left\{\dot{x}^2 + \dot{z}^2\right\} - mg\,z \end{aligned}$$

Nun ist

$$\begin{aligned} z &= f(x) \\ z_t &= f(x_t) \\ \dot{z}_t &= f'(x_t)\,\dot{x}_t \end{aligned}$$

Also

$$\begin{aligned} L(x,\dot{x}) &= \tfrac{m}{2}\left\{\dot{x}^2 + \dot{z}^2\right\} - mg\,z \\ &= \tfrac{m}{2}\left\{\dot{x}^2 + f'(x)^2\,\dot{x}^2\right\} - mg\,f(x) \\ &= \tfrac{m}{2}\left\{1 + f'(x)^2\right\}\dot{x}^2 - mg\,f(x) \end{aligned} \tag{1}$$

b) Die Euler-Lagrange-Gleichung lautet

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \tag{2}$$

Nun ist

$$\tfrac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\left\{1 + f'(x)^2\right\}\dot{x} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} \tfrac{d}{dt}\tfrac{\partial L}{\partial \dot{x}} &= m\left\{1 + f'(x)^2\right\}\ddot{x} + m\,2\,f'(x)\,f''(x)\,\dot{x}\,\dot{x} \\ &= m\left\{1 + f'(x)^2\right\}\ddot{x} + 2m\,f'(x)\,f''(x)\,\dot{x}^2 \end{aligned} \tag{4}$$

und

$$\tfrac{\partial L}{\partial x} = m\,f'(x)\,f''(x)\,\dot{x}^2 - mg\,f'(x)$$

Wenn wir das in (2) einsetzen, bekommen wir also

$$m\left\{1 + f'(x)^2\right\}\ddot{x} + 2m\,f'(x)\,f''(x)\,\dot{x}^2 - \left\{m\,f'(x)\,f''(x)\,\dot{x}^2 - mg\,f'(x)\right\} = 0$$

oder

$$\left\{1 + f'(x)^2\right\}\ddot{x} + f'(x)\,f''(x)\,\dot{x}^2 + g\,f'(x) = 0 \tag{5}$$

c) Mit Gleichung (3) bekommen wir

$$\tfrac{\partial L}{\partial \dot{x}}\,\dot{x} = m\left\{1 + f'(x)^2\right\}\dot{x}^2$$

und damit

$$\begin{aligned} H(x,\dot{x}) &:= \tfrac{\partial L}{\partial \dot{x}}\,\dot{x} - L(x,\dot{x}) \\ &= m\left\{1 + f'(x)^2\right\}\dot{x}^2 - \left\{\tfrac{m}{2}\left\{1 + f'(x)^2\right\}\dot{x}^2 - mg\,f(x)\right\} \\ &= \tfrac{m}{2}\left\{1 + f'(x)^2\right\}\dot{x}^2 + mg\,f(x) \end{aligned} \tag{6}$$

Dies ist eine Konstante der Bewegung, wegen $(x_0, \dot{x}_0) = (0,0)$ und

$$f(x_0) = f(0) = h$$

bekommen wir dann also

$$H(x_t, \dot{x}_t) = H(x_0, \dot{x}_0) = \tfrac{m}{2}\left\{1 + f'(0)^2\right\}0^2 + mg\,f(0) = mg\,h$$

oder

$$\tfrac{m}{2}\left\{1 + f'(x_t)^2\right\}\dot{x}_t^2 + mgf(x_t) = mg\,h \tag{7}$$

Wir können das etwas umstellen und durch m teilen,

$$\left\{1 + f'(x_t)^2\right\}\dot{x}_t^2 = 2g[h - f(x)]$$

und bekommen

$$\dot{x} = \sqrt{2g}\,\sqrt{\tfrac{h - f(x)}{1 + f'(x)^2}}\,. \tag{8}$$

d) Wegen $\dot{x} = dx/dt$ folgt aus Gleichung (8)

$$dt = \frac{dx}{\sqrt{2g}\,\sqrt{\frac{h - f(x)}{1 + f'(x)^2}}} = \tfrac{1}{\sqrt{2g}}\,\sqrt{\tfrac{1+f'(x)^2}{h - f(x)}}\,dx = \tfrac{1}{\sqrt{2g}}\,\sqrt{\tfrac{1+q'(x)^2}{q(x)}}\,dx$$

und damit erhalten wir für die Durchlaufzeit T mit $x_0 = 0$ und $x_T = \ell$:

$$T = \int_0^T dt = \tfrac{1}{\sqrt{2g}}\int_{x_0}^{x_T}\sqrt{\tfrac{1+q'(x)^2}{q(x)}}\,dx = \tfrac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^{\ell}\sqrt{\tfrac{1+q'(x)^2}{q(x)}}\,dx\,. \tag{9}$$

2.Aufgabe: a) Mit

$$L(q,q') = \sqrt{\tfrac{1+q'(x)^2}{q(x)}} \tag{10}$$

bekommen wir

$$\frac{\partial L}{\partial q'} \;=\; \frac{1}{\sqrt{q(x)}}\,\frac{2\,q'(x)}{2\sqrt{1+q'(x)^2}} \;=\; \frac{1}{\sqrt{q(x)}}\,\frac{q'(x)}{\sqrt{1+q'(x)^2}}$$

und damit

$$\begin{aligned}
H(q,q') \;&:=\; \frac{\partial L}{\partial q'}\,q' \;-\; L \\
&=\; \frac{1}{\sqrt{q(x)}}\,\frac{q'(x)^2}{\sqrt{1+q'(x)^2}} \;-\; \frac{1}{\sqrt{q(x)}}\,\sqrt{1+q'(x)^2} \\
&=\; \frac{1}{\sqrt{q(x)}}\,\frac{q'(x)^2}{\sqrt{1+q'(x)^2}} \;-\; \frac{1}{\sqrt{q(x)}}\,\frac{1+q'(x)^2}{\sqrt{1+q'(x)^2}} \\
&=\; \frac{1}{\sqrt{q(x)}}\,\frac{-1}{\sqrt{1+q'(x)^2}} \;=\; \text{constant}
\end{aligned} \tag{11}$$

b) Wir haben

$$\begin{aligned}
& z(\dot{x}^2+\dot{z}^2) \;=\; c\,\dot{x}^2 \\
\Leftrightarrow\quad & z\Big(1\;+\;\tfrac{\dot{z}^2}{\dot{x}^2}\Big) \;=\; c \\
\Leftrightarrow\quad & z\Big(1\;+\;\big\{\tfrac{dz/dt}{dx/dt}\big\}^2\Big) \;=\; c \\
\Leftrightarrow\quad & z\Big(1\;+\;\big\{\tfrac{dz}{dx}\big\}^2\Big) \;=\; c \\
\overset{z=q(x)}{\Leftrightarrow}\quad & q(x)\Big(1\;+\;\big\{q'(x)\big\}^2\Big) \;=\; c \\
\Leftrightarrow\quad & -\;\frac{1}{\sqrt{q(x)[1+q'(x)^2]}} \;=\; -\;\frac{1}{\sqrt{c}}
\end{aligned}$$

c) Mit

$$\begin{aligned}
x_t \;&=\; \tfrac{c}{2}\big[\,2t\;-\;\sin(2t)\,\big] \\
z_t \;&=\; \tfrac{c}{2}\big[\,1\;-\;\cos(2t)\,\big]
\end{aligned}$$

bekommen wir

$$\begin{aligned}
\dot{x}_t \;&=\; \tfrac{c}{2}\big[\,2\;-\;2\cos(2t)\,\big] \;=\; c\,\big[\,1\;-\;\cos(2t)\,\big] \\
\dot{z}_t \;&=\; \tfrac{c}{2}\big[\,0\;+\;2\sin(2t)\,\big] \;=\; c\,\sin(2t)
\end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned}
\dot{x}^2+\dot{z}^2 \;&=\; c^2\big\{1\;-\;2\cos(2t)\;+\;\cos^2(2t)\;+\;\sin^2(2t)\big\} \\
&=\; 2c^2\big\{1\;-\;\cos(2t)\big\}
\end{aligned}$$

Also

$$\begin{aligned}
z(\dot{x}^2+\dot{z}^2) \;&=\; \tfrac{c}{2}\big[\,1\;-\;\cos(2t)\,\big]\;\times\;2c^2\big\{1\;-\;\cos(2t)\big\} \\
&=\; c^3\,\big[\,1\;-\;\cos(2t)\,\big]^2 \;=\; c\,\dot{x}^2
\end{aligned}$$

Schauen wir uns die Randbedingungen

$$(x_0, z_0) \stackrel{!}{=} (0,0) \tag{12}$$

$$(x_{t_{\text{end}}}, z_{t_{\text{end}}}) \stackrel{!}{=} (\ell, h) \tag{13}$$

an. Gleichung (12) ist offensichtlich automatisch erfüllt, für beliebiges c und t_{end}. Aus Gleichung (13) ergibt sich

$$x_{t_{\text{end}}} = \tfrac{c}{2}\big[\,2t_{\text{end}} - \sin(2t_{\text{end}})\,\big] \stackrel{!}{=} \ell \tag{14}$$

$$z_{t_{\text{end}}} = \tfrac{c}{2}\big[\,1 - \cos(2t_{\text{end}})\,\big] \stackrel{!}{=} h \tag{15}$$

Wir können etwa das c eliminieren, indem wir (15) durch (14) teilen,

$$\frac{z_t}{x_t} = \frac{1 - \cos(2t)}{2t - \sin(2t)} \stackrel{!}{=} \frac{h}{\ell} \tag{16}$$

Aus Gleichung (16) bekommen wir das t_{end} und aus (14) oder (15) dann das c.

d) Wir plotten die Hilfsfunktion, das ist der Ausdruck in (16),

$$g(t) := \frac{1 - \cos(2t)}{2t - \sin(2t)}$$

und tun dann einfach graphisch die Nullstelle (oder die Nullstellen..) von $g(t) - h/\ell = g(t) - 1/5$ bestimmen, das ist dann das t_{end}. Siehe Excel-Sheet.

Tatsächlich findet man 3 verschiedene Lösungen für (c, t_{end}). Möglicherweise sind die anderen beiden Lösungen dann stationäre Punkte für das Funktional (9) von oben, also so ähnlich wie $x = 0$ ein stationärer Punkt für die Funktion $y(x) = x^3$ ist, die erste Ableitung ist 0, aber es ist kein Minimum. Ok, wir tun das hier nicht weiter analysieren. Alle 3 Lösungen sind auf dem Excelsheet geplottet.