

Lösungen zum 11. Übungsblatt Dynamik der Teilchen und Felder

1. Aufgabe: a) Die Formel

$$(a^+ + a)^m = \sum_{k=0}^{[m/2]} \frac{m!}{2^k k!} \sum_{j=0}^{m-2k} \frac{(a^+)^{m-2k-j} a^j}{(m-2k-j)! j!}$$

liefert für den Fall $m = 2$:

$$\begin{aligned} (a^+ + a)^2 &= \sum_{k=0}^1 \frac{2!}{2^k k!} \sum_{j=0}^{2-2k} \frac{(a^+)^{2-2k-j} a^j}{(2-2k-j)! j!} \\ &= \frac{2!}{2^0 0!} \sum_{j=0}^2 \frac{(a^+)^{2-j} a^j}{(2-j)! j!} + \frac{2!}{2^1 1!} \sum_{j=0}^0 \frac{(a^+)^{0-j} a^j}{(0-j)! j!} \\ &= 2 \left\{ \frac{(a^+)^2 a^0}{2! 0!} + \frac{(a^+)^1 a^1}{1! 1!} + \frac{(a^+)^0 a^2}{0! 2!} + 1 \right\} \\ &= (a^+)^2 + 2 a^+ a + a^2 + 1 \\ &\stackrel{1=[a,a^+]}{=} (a^+)^2 + 2 a^+ a + a^2 + a a^+ - a^+ a \\ &= (a^+)^2 + a^+ a + a a^+ + a^2 \end{aligned}$$

und das ist offensichtlich korrekt.

b) Für $m = 4$ erhalten wir

$$\begin{aligned} (a^+ + a)^4 &= \sum_{k=0}^2 \frac{4!}{2^k k!} \sum_{j=0}^{4-2k} \frac{(a^+)^{4-2k-j} a^j}{(4-2k-j)! j!} \\ &= \frac{4!}{2^0 0!} \sum_{j=0}^4 \frac{(a^+)^{4-j} a^j}{(4-j)! j!} \\ &\quad + \frac{4!}{2^1 1!} \sum_{j=0}^2 \frac{(a^+)^{2-j} a^j}{(2-j)! j!} \\ &\quad + \frac{4!}{2^2 2!} \sum_{j=0}^0 \frac{(a^+)^{0-j} a^j}{(0-j)! j!} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 24 \left\{ \frac{(a^+)^4}{4!} + \frac{(a^+)^3 a}{3! 1!} + \frac{(a^+)^2 a^2}{2! 2!} + \frac{a^+ a^3}{1! 3!} + \frac{a^4}{4!} \right\} \\
&\quad + 12 \left\{ \frac{(a^+)^2}{2!} + \frac{a^+ a}{1! 1!} + \frac{a^2}{2!} \right\} \\
&\quad + 3 \times 1 \\
&= (a^+)^4 + 4(a^+)^3 a + 6(a^+)^2 a^2 + 4a^+ a^3 + a^4 \\
&\quad + 6(a^+)^2 + 12a^+ a + 6a^2 + 3 .
\end{aligned}$$

c) Mit $\hat{n} := a^+ a$ bekommen wir aus Teil (b)

$$\begin{aligned}
(a^+ + a)^4 &= (a^+)^4 + 4(a^+)^3 a + 6(a^+)^2 a^2 + 4a^+ a^3 + a^4 \\
&\quad + 6(a^+)^2 + 12a^+ a + 6a^2 + 3 \\
&= (a^+)^4 + 4(a^+)^2 \hat{n} + 6a^+ \hat{n} a + 4\hat{n} a^2 + a^4 \\
&\quad + 6(a^+)^2 + 12\hat{n} + 6a^2 + 3
\end{aligned}$$

Nun gilt für beliebiges n

$$\hat{n} a h_n = a(\hat{n} - 1) h_n$$

Also ist

$$a^+ \hat{n} a = a^+ a (\hat{n} - 1) = \hat{n} (\hat{n} - 1)$$

und damit

$$\begin{aligned}
(a^+ + a)^4 &= (a^+)^4 + 4(a^+)^2 \hat{n} + 6a^+ \hat{n} a + 4\hat{n} a^2 + a^4 \\
&\quad + 6(a^+)^2 + 12\hat{n} + 6a^2 + 3 \\
&= (a^+)^4 + 4(a^+)^2 \hat{n} + 6\hat{n} (\hat{n} - 1) + 4\hat{n} a^2 + a^4 \\
&\quad + 6(a^+)^2 + 12\hat{n} + 6a^2 + 3 \\
&= (a^+)^4 + (a^+)^2 (4\hat{n} + 6) + 6\hat{n} (\hat{n} - 1) + (4\hat{n} + 6)a^2 + a^4 + 12\hat{n} + 3 \\
&= (a^+)^4 + (a^+)^2 (4\hat{n} + 6) + (4\hat{n} + 6)a^2 + a^4 + 6\hat{n} (\hat{n} + 1) + 3
\end{aligned}$$

Berücksichtigen wir noch, dass

$$\hat{n} a^2 h_n = a^2 (\hat{n} - 2) h_n$$

für beliebige h_n 's gilt, erhalten wir dann die Formel aus Teil (c),

$$(a^+ + a)^4 = (a^+)^4 + (a^+)^2 (4\hat{n} + 6) + a^2 (4\hat{n} - 2) + a^4 + 6\hat{n} (\hat{n} + 1) + 3 .$$