Hochschule RheinMain
Prof. Dr. D. Lehmann SS 2020

Lösungen zum 1. Übungsblatt
Dynamik der Teilchen und Felder

1.Aufgabe: Die Gleichung (1.8) ist

$$m\ddot{x} \;=\; F \tag{1}$$

wobei die Kraft F gegeben ist durch

$$F \;=\; -U'(x) \;=\; -\tfrac{dU}{dx}$$

mit dem Potenzial $U = U(x)$. Wir multiplizieren (1) mit $\dot{x}$:

$$m\ddot{x}\,\dot{x} \;=\; F\,\dot{x} \;=\; -\tfrac{dU}{dx}\,\dot{x} \tag{2}$$

Die linke und die rechte Seite von (2) kann man als Ableitungen nach der Zeit schreiben:

$$\tfrac{d}{dt}\Big\{\tfrac{m\,\dot{x}^2}{2}\Big\} \;=\; -\tfrac{d}{dt}\Big\{\,U\big(x(t)\big)\,\Big\}$$

oder

$$\tfrac{d}{dt}\Big\{\tfrac{m\,\dot{x}^2}{2} \,+\, U\big(x(t)\big)\Big\} \;=\; 0 \tag{3}$$

Aus Gleichung (3) folgt, dass die Grösse in den geschweiften Klammern, die Gesamt-Energie, zeitlich konstant sein muss. Also

$$E \;:=\; \tfrac{m\,\dot{x}^2}{2} \,+\, U\big(x(t)\big) \;=\; \text{konstant} \tag{4}$$

Gleichung (4) können wir nach $\dot{x}$ auflösen:

$$\dot{x}(t) \;=\; \sqrt{\tfrac{2}{m}[E - U(x)]} \tag{5}$$

Wegen

$$\dot{x} \;=\; \tfrac{dx}{dt}$$

erhalten wir aus (5)

$$\frac{dx}{\sqrt{\tfrac{2}{m}[E - U(x)]}} \;=\; dt$$

und wenn wir das dann integrieren

$$\int_{x_0}^{x_t} \frac{dx}{\sqrt{\tfrac{2}{m}[E - U(x)]}} \;=\; t \,-\, t_0 \tag{6}$$

Gleichung (6) stimmt überein mit Gleichung (1.9) aus `week1.pdf` .

2.Aufgabe: Nach Annahme haben wir

$$\text{Erde} \;=\; K_R(0) \;:=\; \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \,|\, \|\vec{x}\| \leq R \right\}$$

mit $K_R(0)$ die Kugel mit Radius R um den Ursprung. Wir müssen berechnen

$$\vec{F}(\vec{x}) \;=\; k \int_{K_R(0)} d^3x_1 \, \frac{\vec{x} - \vec{x}_1}{\|\vec{x} - \vec{x}_1\|^3} \tag{7}$$

mit der Konstanten

$$k \;:=\; -G\, m\, \rho_{\text{Erde}} \tag{8}$$

Es sei $D \in SO(3)$ eine beliebige Drehmatrix. Insbesondere gilt also

$$\begin{aligned} D^T &= D^{-1} \\ \det D &= 1 \end{aligned}$$

und $\|D\vec{y}\| = \|\vec{y}\|$ für alle $\vec{y} \in \mathbb{R}^3$. Damit bekommen wir

$$\begin{aligned} \vec{F}(D\vec{x}) &= k \int_{K_R(0)} d^3x_1 \, \frac{D\vec{x} - \vec{x}_1}{\|D\vec{x} - \vec{x}_1\|^3} \\ &\overset{\vec{x}_1 = D\vec{y}}{=} k \int_{K_R(0)} d^3(Dy) \, \frac{D\vec{x} - D\vec{y}}{\|D\vec{x} - D\vec{y}\|^3} \\ &\overset{\det D = 1}{=} k \int_{K_R(0)} d^3y \, \frac{D\vec{x} - D\vec{y}}{\|\vec{x} - \vec{y}\|^3} \\ &= D \left\{ k \int_{K_R(0)} d^3y \, \frac{\vec{x} - \vec{y}}{\|\vec{x} - \vec{y}\|^3} \right\} \;=\; D\,\vec{F}(\vec{x}) \end{aligned}$$

also

$$\vec{F}(D\vec{x}) \;=\; D\,\vec{F}(\vec{x}) \tag{9}$$

und damit auch

$$\|\vec{F}(D\vec{x})\| \;=\; \|D\,\vec{F}(\vec{x})\| \;=\; \|\vec{F}(\vec{x})\| \tag{10}$$

für jede Drehmatrix $D \in SO(3)$. Wir legen jetzt $\vec{x}$ auf die positive z-Achse,

$$\vec{x} \;=\; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix}$$

mit $r = \|\vec{x}\|$. Für die Integration wählen wir Kugelkoordinaten,

$$\vec{y} \;=\; \rho \begin{pmatrix} \cos\varphi \sin\theta \\ \sin\varphi \sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

mit

$$\begin{aligned} \rho &\in [0, R] \\ \varphi &\in [0, 2\pi] \\ \theta &\in [0, \pi] \end{aligned}$$

und

$$d^3y \;=\; \rho^2 \sin\theta \, d\rho \, d\varphi \, d\theta \;\; .$$

Dann haben wir

$$\begin{aligned}
\|\vec{x}-\vec{y}\|^2 &= \rho^2\cos^2\varphi\sin^2\theta \,+\, \rho^2\sin^2\varphi\sin^2\theta \,+\, (r-\rho\cos\theta)^2 \\
&= \rho^2\sin^2\theta \,+\, (r-\rho\cos\theta)^2 \\
&= \rho^2\sin^2\theta \,+\, r^2 \,-\, 2r\rho\cos\theta \,+\, \rho^2\cos^2\theta \\
&= \rho^2 \,+\, r^2 \,-\, 2r\rho\cos\theta
\end{aligned}$$

und wir müssen folgendes Integral berechnen:

$$\begin{aligned}
\vec{F}(\vec{x}) &= k\int_{K_R(0)} d^3y \, \frac{\vec{x}-\vec{y}}{\|\vec{x}-\vec{y}\|^3} \\
&= k\int_0^R d\rho\,\rho^2 \int_0^\pi d\theta\,\sin\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \, \frac{1}{(\rho^2 \,+\, r^2 \,-\, 2r\rho\cos\theta)^{3/2}} \begin{pmatrix} -\rho\cos\varphi\sin\theta \\ -\rho\sin\varphi\sin\theta \\ r-\rho\cos\theta \end{pmatrix} \\
&= k\int_0^R d\rho\,\rho^2 \int_0^\pi d\theta\,\sin\theta \, \frac{1}{(\rho^2 \,+\, r^2 \,-\, 2r\rho\cos\theta)^{3/2}} \begin{pmatrix} -\rho\int_0^{2\pi} d\varphi\cos\varphi\sin\theta \\ -\rho\int_0^{2\pi} d\varphi\sin\varphi\sin\theta \\ 2\pi(r-\rho\cos\theta) \end{pmatrix} \\
&= k\int_0^R d\rho\,\rho^2 \int_0^\pi d\theta\,\sin\theta \, \frac{1}{(\rho^2 \,+\, r^2 \,-\, 2r\rho\cos\theta)^{3/2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2\pi(r-\rho\cos\theta) \end{pmatrix} \;=:\; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ F(r) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

mit

$$F(r) \;=\; 2\pi k \int_0^R d\rho\,\rho^2 \int_0^\pi d\theta\,\sin\theta \, \frac{r-\rho\cos\theta}{(\rho^2 \,+\, r^2 \,-\, 2r\rho\cos\theta)^{3/2}} \tag{11}$$

Wegen

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dr}\left\{ \frac{1}{(\rho^2 \,+\, r^2 \,-\, 2r\rho\cos\theta)^{1/2}} \right\} &= -\,\frac{1}{2}\,\frac{2r-2\rho\cos\theta}{(\rho^2 \,+\, r^2 \,-\, 2r\rho\cos\theta)^{3/2}} \\
&= -\,\frac{r-\rho\cos\theta}{(\rho^2 \,+\, r^2 \,-\, 2r\rho\cos\theta)^{3/2}}
\end{aligned}$$

können wir Gleichung (11) auch folgendermassen schreiben:

$$\begin{aligned}
F(r) &= -2\pi k \int_0^R d\rho\,\rho^2 \int_0^\pi d\theta\,\sin\theta \, \frac{d}{dr}\left\{ \frac{1}{(\rho^2 \,+\, r^2 \,-\, 2r\rho\cos\theta)^{1/2}} \right\} \\
&= -2\pi k \, \frac{d}{dr}\left\{ \int_0^R d\rho\,\rho^2 \int_0^\pi d\theta\,\sin\theta \, \frac{1}{(\rho^2 \,+\, r^2 \,-\, 2r\rho\cos\theta)^{1/2}} \right\} \\
&=: -2\pi k \, \frac{d}{dr}\, I(r)
\end{aligned} \tag{12}$$

mit dem Integral

$$
\begin{aligned}
I(r) &= \int_0^R d\rho\,\rho^2 \int_0^\pi d\theta\,\sin\theta\,\frac{1}{(\rho^2\,+\,r^2\,-\,2r\rho\cos\theta)^{1/2}} \\
&\overset{u=\cos\theta}{=} -\int_0^R d\rho\,\rho^2 \int_1^{-1} du\,\frac{1}{(\rho^2\,+\,r^2\,-\,2r\rho\,u)^{1/2}} \\
&= +\int_0^R d\rho\,\rho^2 \int_{-1}^{1} du\,\frac{1}{(\rho^2\,+\,r^2\,-\,2r\rho\,u)^{1/2}} \\
&= \int_0^R d\rho\,\rho^2\,\frac{2}{-2r\rho}\,(\rho^2\,+\,r^2\,-\,2r\rho\,u)^{1/2}\Big|_{u=-1}^{u=1} \\
&= -\frac{1}{r}\int_0^R d\rho\,\rho\,(\rho^2\,+\,r^2\,-\,2r\rho\,u)^{1/2}\Big|_{u=-1}^{u=1} \\
&= -\frac{1}{r}\int_0^R d\rho\,\rho\,\Big\{(\rho^2\,+\,r^2\,-\,2r\rho)^{1/2}\,-\,(\rho^2\,+\,r^2\,+\,2r\rho)^{1/2}\Big\} \\
&= -\frac{1}{r}\int_0^R d\rho\,\rho\,\big\{\,|r-\rho|\,-\,|r+\rho|\,\big\} \\
&= +\frac{1}{r}\int_0^R d\rho\,\rho\,\big\{\,|r+\rho|\,-\,|r-\rho|\,\big\} \\
&\overset{\rho\le R\le r}{=} \frac{1}{r}\int_0^R d\rho\,\rho\,\big\{\,r+\rho\,-\,(r-\rho)\,\big\} \\
&= \frac{1}{r}\int_0^R d\rho\,2\rho^2 \;=\; \frac{1}{r}\,\frac{2R^3}{3}
\end{aligned}
\tag{13}
$$

Gleichung (13) eingesetzt in (12) liefert

$$
\begin{aligned}
F(r) &= -2\pi k\,\frac{d}{dr}\,I(r) \\
&= k\,\frac{1}{r^2}\,\frac{4\pi R^3}{3} \\
&\overset{(8)}{=} -Gm\,\rho_{\text{Erde}}\,\frac{1}{r^2}\,\frac{4\pi R^3}{3} \\
&= -Gm\,\frac{M}{r^2}
\end{aligned}
\tag{14}
$$

Wir haben hier ein Minuszeichen, da wir das $F(r)$ nicht als den Betrag von $\vec{F}$ definiert hatten, sondern einfach als die z-Komponente von $\vec{F}$.

b) Mit $r = R + h$ und $h \ll R$ haben wir dann noch

$$
\frac{1}{r^2} \;=\; \frac{1}{(R+h)^2} \;=\; \frac{1}{R^2}\,\frac{1}{(1+\varepsilon)^2}
$$

mit $\varepsilon := h/R$. Wegen

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{(1+\varepsilon)^2} &= (1-\varepsilon+\varepsilon^2-\varepsilon^3\pm\cdots)^2 \\
&= 1\,-\,2\varepsilon\,+\,O(\varepsilon^2)
\end{aligned}
$$

folgt dann die Behauptung.

Bemerkung: Sowas sollen Sie dann natürlich **nicht** in der Klausur machen; am Ende der Veranstaltung wird es noch eine Probe-Klausur geben, also nur so zur Info, so dass Sie also einen groben Eindruck bekommen, wie das dann aussieht.

3.Aufgabe: Die Näherungsformeln für x^2, für x und für dx erhält man jeweils durch Anwenden der Taylorentwicklung erster Ordnung auf die Funktionen

$$f_\pm(\varepsilon) \;:=\; \sqrt{1 \pm \varepsilon} \;.$$

Allgemein gilt

$$\begin{aligned} f(x+h) \quad &= \quad f(x) \;+\; f'(x)\,h \;+\; \tfrac{1}{2}\,f''(x)\,h^2 \;+\; \tfrac{1}{6}\,f'''(x)\,h^3 \;+\; \tfrac{1}{4!}\,f''''(x)\,h^4 \;+\; \cdots \\ &\overset{\substack{\text{first order}\\ h\text{ small}}}{\approx} \quad f(x) \;+\; f'(x)\,h \end{aligned}$$

Insbesondere

$$f(\varepsilon) \;=\; f(0) \;+\; f'(0)\,\varepsilon \;+\; O(\varepsilon^2)$$

Wegen

$$\begin{aligned} f'_\pm(\varepsilon) \;&=\; \frac{\pm 1}{2\sqrt{1 \pm \varepsilon}} \\ f'_\pm(0) \;&=\; \pm\,\frac{1}{2} \end{aligned}$$

hat man für kleine $\varepsilon \ll 1$ also die Näherungsformeln

$$\begin{aligned} \sqrt{1+\varepsilon} \;&\approx 1 \;+\; \tfrac{\varepsilon}{2} \;, \\ \sqrt{1-\varepsilon} \;&\approx 1 \;-\; \tfrac{\varepsilon}{2} \;. \end{aligned}$$