IV Maxwellgleichungen: Grundlagen

16 Maxwellgleichungen

In Teil II und III haben wir die Elektro- und Magnetostatik getrennt behandelt. Für zeitabhängige Vorgänge gibt es Kopplungen zwischen elektrischen und magnetischen Feldern, die wir als „Faradaysches Induktionsgesetz" und als „Maxwellschen Verschiebungsstrom" einführen. Durch die zugehörigen Kopplungsterme werden die Feldgleichungen der Elektro- und Magnetostatik zu den Maxwellschen Gleichungen verallgemeinert. Anschließend wird die Energie- und Impulsdichte des elektromagnetischen Felds bestimmt.

Die Feldgleichungen der Elektro- und Magnetostatik lauten

$$\begin{aligned} &\operatorname{div} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = 4\pi\varrho(\boldsymbol{r})\,, && \operatorname{rot} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = 0 && \text{(Elektrostatik)} \\ &\operatorname{rot} \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = (4\pi/c)\,\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})\,, && \operatorname{div} \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = 0 && \text{(Magnetostatik)} \end{aligned} \tag{16.1}$$

Hieraus folgt die Kontinuitätsgleichung in der Form

$$\operatorname{div} \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}) = 0 \tag{16.2}$$

Das elektrische und das magnetische Feld werden durch ihre Kraftwirkungen definiert. Auf eine Punktladung mit dem Ort $\boldsymbol{r}_0$ und der Geschwindigkeit $\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{r}}_0$ wirken die Kräfte (5.11) und (13.22):

$$\boldsymbol{F} = q\,\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}_0) \quad \text{und} \quad \boldsymbol{F} = q\,\frac{\boldsymbol{v}}{c} \times \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}_0) \tag{16.3}$$

Man kann leicht sehen, dass es Zusammenhänge zwischen dem elektrischen und magnetischen Feld geben muss, also dass (16.1) nicht die allgemein gültige Theorie darstellen kann: In einem Inertialsystem (IS) gebe es eine statische Ladungsverteilung $\varrho(\boldsymbol{r})$. In einem relativ dazu bewegten IS′ erscheint diese Verteilung als Ladungs- *und* Stromverteilung. Während es in IS nur ein elektrisches Feld gibt, existiert in IS′ neben dem elektrischen auch ein magnetisches Feld. Daher transformieren sich die Felder beim Übergang zwischen Inertialsystemen ineinander; sie hängen teilweise vom Standpunkt des Beobachters ab.

T. Fließbach, *Elektrodynamik*, DOI 10.1007/978-3-8274-3036-6_17
© Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2012

Für einen Grenzfall können wir die Transformation der Felder aus (16.3) ablesen. In einem IS bewege sich ein Teilchen mit konstanter Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}$ in einem elektrischen Feld $\boldsymbol{E}$ und einem magnetischen Feld $\boldsymbol{B}$. Nach (16.3) wirkt die Kraft $q\,(\boldsymbol{E} + (\boldsymbol{v}/c) \times \boldsymbol{B})$ auf das Teilchen. Wir gehen nun ins Ruhsystem IS′ des Teilchens. Wegen $\boldsymbol{v}' = 0$ ergibt sich jetzt aus (16.3) die Kraft $q\,\boldsymbol{E}'$, wobei $\boldsymbol{E}'$ das elektrische Feld in IS′ ist. Im nichtrelativistischen Grenzfall (bei Vernachlässigung von Termen $\mathcal{O}(v^2/c^2)$) sind beide Kräfte gleich. Daher gilt

$$\boldsymbol{E}' = \boldsymbol{E} + \frac{\boldsymbol{v}}{c} \times \boldsymbol{B} \qquad (v \ll c) \tag{16.4}$$

für die Transformation von IS (mit $\boldsymbol{E}$ und $\boldsymbol{B}$) zu IS′ (mit $\boldsymbol{E}'$). Dies bedeutet zum Beispiel: Bereits ein magnetisches Feld in IS (also $\boldsymbol{E} = 0$ und $\boldsymbol{B} \neq 0$) impliziert ein elektrisches Feld in IS′ (also $\boldsymbol{E}' \neq 0$).

Wir stellen jetzt die Verallgemeinerung von (16.1) für zeitabhängige Vorgänge auf. Dazu versehen wir alle Felder mit einem Zeitargument und fügen zwei zusätzliche Terme ein:

$$\boxed{\begin{aligned} &\operatorname{div} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = 4\pi\varrho(\boldsymbol{r},t)\,, \qquad \operatorname{rot} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) + \underbrace{\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}}_{\text{Induktion}} = 0 \\ &\operatorname{rot} \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t) - \underbrace{\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}}_{\text{Verschiebungsstrom}} = \frac{4\pi}{c}\,\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},t)\,, \qquad \operatorname{div} \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t) = 0 \end{aligned}} \tag{16.5}$$

Diese *Maxwellgleichungen* wurden 1864 von Maxwell aufgestellt. Die zusätzlichen, mit *Induktion* und *Verschiebungsstrom* gekennzeichneten Terme werden in den folgenden beiden Abschnitten begründet.

Wir leiten die Maxwellgleichung mit $\operatorname{div} \boldsymbol{E}$ nach der Zeit ab und bilden die Divergenz der Gleichung mit $\operatorname{rot} \boldsymbol{B}$. Die Kombination der beiden resultierenden Gleichungen ergibt die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \varrho(\boldsymbol{r},t)}{\partial t} + \operatorname{div} \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},t) = 0 \tag{16.6}$$

Die Kräfte (16.3) werden zur *Lorentzkraft* $\boldsymbol{F}_{\mathrm{L}}$ zusammengefasst:

$$\boxed{\boldsymbol{F}_{\mathrm{L}} = q\left(\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}_0,t) + \frac{\boldsymbol{v}}{c} \times \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}_0,t)\right)} \tag{16.7}$$

Die Gleichungen (16.5) und (16.7) sind die Grundgleichungen der Elektrodynamik. Aus ihnen werden alle relevanten Aussagen abgeleitet.

A MKSA-System

Im diesem Buch wird grundsätzlich das Gaußsche Maßsystem verwendet (Kapitel 5). Für numerische Abschätzungen wird dagegen in der Regel das „Praktische MKSA-System“, kurz MKSA-System, benutzt. Synonym zu MKSA-System ist die Bezeichnung SI-System (für Système International d'Unités). Dieser Anhang stellt die wichtigsten Formeln der Elektrodynamik im MKSA-System zusammen.

In der Bezeichnung „MKSA-System“ steht M für die Grundeinheit Meter (m), K für Kilogramm (kg), S für Sekunde (s) und A für Ampere (A). Die Grundeinheiten des Gauß-Systems sind Zentimeter (cm), Gramm (g) und Sekunde (s); es wird daher auch cgs-System genannt. In der Mechanik bestehen die Unterschiede zwischen MKSA- und cgs-System in trivialen Zehnerpotenzen. Insbesondere ist $\mathrm{dyn} \equiv \mathrm{g\,cm/s^2} = 10^{-5}\,\mathrm{kg\,m/s^2} = 10^{-5}\,\mathrm{N}$ und

$$\mathrm{erg} \equiv \frac{\mathrm{g\,cm^2}}{\mathrm{s^2}} = 10^{-7}\,\frac{\mathrm{kg\,m^2}}{\mathrm{s^2}} = 10^{-7}\,\mathrm{J} \tag{A.1}$$

Wegen der trivialen Umrechnungsfaktoren verwenden wir m, kg, N (Newton) und J (Joule) parallel zu cm, g, dyn und erg.

Ladungs- und Stromeinheit

Das MKSA-System definiert die Einheit Ampere für den Strom als vierte Grundeinheit. Durch zwei parallele Drähte im Abstand von 1 m fließe jeweils der Strom I. Dieser Strom I ist gleich 1 A, wenn pro 1 m Drahtlänge die Kraft $2 \cdot 10^{-7}$ N wirkt. Nach (5.6) folgt hieraus die Konstante k im Coulombgesetz:

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \stackrel{\text{def}}{=} 10^{-7}\,\frac{\mathrm{N}\,c^2}{\mathrm{A}^2} \qquad \text{(Definition des Ampere)} \tag{A.2}$$

Die Konstante k wird im MKSA-System mit $1/4\pi\varepsilon_0$ bezeichnet. Wir schreiben das Coulombgesetz (5.1) noch einmal mit dieser Konstante und mit $k = 1$ (Gauß-System) an:

$$\boldsymbol{F}_1 = q_1\,q_2\,\frac{\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2}{|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|^3} \cdot \begin{cases} \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} & \text{MKSA-System} \\ 1 & \text{Gauß-System} \end{cases} \tag{A.3}$$

T. Fließbach, *Elektrodynamik*, DOI 10.1007/978-3-8274-3036-6
© Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2012

Tabelle A.1 Abgeleitete Einheiten der Elektrodynamik im MKSA-System. Die Einheit A (Ampere) des Stroms I ist eine Grundeinheit. Das elektrische und magnetische Feld wird jeweils durch seine Kraftwirkung definiert, (A.7) und (A.10). Folgende Definitionsgleichungen gelten sowohl im Gauß- wie im MKSA-System: Spannung $U = \int d\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{E}$, Arbeit oder Energie $A = W = UQ$, magnetischer Fluss $\Phi_\mathrm{m} = \int d\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{B}$, Widerstand $R = U/I$, Kapazität $C = Q/U$ und Induktivität $L = -U/(dI/dt)$.

Größe	Symbol	Einheit	Bezeichnung
Ladung	Q	$\mathrm{C} = \mathrm{A\,s}$	Coulomb
Spannung	U	$\mathrm{V} = \mathrm{J/C}$	Volt
Arbeit, Energie	A, W	$\mathrm{J} = \mathrm{Ws} = \mathrm{CV}$	Joule
elektrische Feldstärke	$\boldsymbol{E}$	$\mathrm{V/m}$	Volt/Meter
magnetische Induktion	$\boldsymbol{B}$	$\mathrm{T} = \mathrm{Vs/m^2}$	Tesla
magnetischer Fluss	Φ_m	$\mathrm{Wb} = \mathrm{Vs}$	Weber
Widerstand	R	$\Omega = \mathrm{V/A}$	Ohm
Kapazität	C	$\mathrm{F} = \mathrm{C/V}$	Farad
Induktivität	L	$\mathrm{H} = \mathrm{Vs/A}$	Henry

Im MKSA-System werden die Ladungen in der Einheit $\mathrm{C} = \mathrm{A\,s} =$ Coulomb ausgedrückt; zusammen mit (A.2) liefert (A.3) dann die Kraft.

Die Tabelle A.1 stellt die wichtigsten Einheiten der Elektrodynamik im MKSA-System zusammen.

Im Gaußschen System wurde die Ladungseinheit über (A.3) definiert: Zwei Ladungen der Größe ESE (elektrostatische Einheit) üben im Abstand von 1 cm die Kraft $1\,\mathrm{dyn} = \mathrm{g\,cm/s^2}$ aufeinander aus. Damit ist die Ladungseinheit ESE eine aus g, cm und s abgeleitete Einheit. Über (A.3) können wir die zu ESE gehörige Ladung Q_ESE in Coulomb berechnen:

$$1\,\mathrm{dyn} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_\mathrm{ESE}^{\,2}}{\mathrm{cm}^2} \tag{A.4}$$

Mit $1\,\mathrm{dyn} = 10^{-5}\,\mathrm{N}$ und (A.2) ergibt dies

$$Q_\mathrm{ESE} = 10\,\frac{\mathrm{cm}}{c}\,\mathrm{A} \approx 3.3 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{C} \tag{A.5}$$

Eine Ladung der Größe 1 C im MKSA-System entspricht dann etwa $3 \cdot 10^9$ ESE im Gauß-System. Die Kräfte zwischen zwei Ladungen dieser Größe sind im MKSA-System und im Gauß-System gleich. Daraus folgt

$$\frac{\mathrm{C}}{\sqrt{4\pi\varepsilon_0}} \approx 3 \cdot 10^9\,\mathrm{ESE} \tag{A.6}$$

Elektrostatik

Die Definition der Feldstärke durch

$$\boldsymbol{F} = q\,\boldsymbol{E} \tag{A.7}$$

gilt auch im MKSA-System. Damit ist die Einheit der elektrischen Feldstärke

$$[E] = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}} = \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{Cm}} = \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}} \tag{A.8}$$

Alle Formeln der Elektrostatik wurden aus dem Coulombgesetz (A.3) und der Felddefinition (A.7) abgeleitet. Aus (A.3) folgt die jeweilige Modifikation im MKSA-System gegenüber dem Gauß-System. Die Feldgleichungen der Elektrostatik im MKSA-System lauten:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{\varrho(\boldsymbol{r})}{\varepsilon_0}\,, \qquad \operatorname{rot} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = 0 \tag{A.9}$$

Magnetostatik

Die magnetische Induktion $\boldsymbol{B}$ wird im MKSA-System durch

$$d\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = I\,d\boldsymbol{\ell} \times \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) \tag{A.10}$$

definiert. Damit hat $\boldsymbol{B}$ die Dimension

$$[\mathrm{B}] = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{Am}} = \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{Am}^2} = \frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{m}^2} \tag{A.11}$$

Gegenüber (13.15) fehlt in (A.10) ein Faktor $1/c$. Dementsprechend lautet die Lorentzkraft $\boldsymbol{F}_\mathrm{L} = q\,(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})$. Anstelle von (13.20) tritt dann

$$d\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}_1) = \frac{\mu_0}{4\pi}\,I\,d\boldsymbol{\ell} \times \frac{\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2}{|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|^3} \tag{A.12}$$

Die Konstante in der Definition (A.10) von $\boldsymbol{B}$ kann im Prinzip willkürlich gewählt werden; nach einer solchen Festlegung ist die Konstante in (A.12) dann experimentell zu bestimmen.

Nachdem $\boldsymbol{B}$ als Messgröße durch (A.10) festgelegt ist, folgt die Konstante $\mu_0/4\pi$ aus dem Experiment. Für die so bestimmte Permeabilitätskonstante (des Vakuums) μ_0 und der Dielektrizitätskonstante (des Vakuums) ε_0 in (A.3) gilt

$$\mu_0 = \frac{1}{\varepsilon_0\,c^2} \tag{A.13}$$

Die Feldgleichungen der Magnetostatik lauten:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = 0\,, \qquad \operatorname{rot} \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \mu_0\,\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}) \tag{A.14}$$

Maxwellgleichungen

Die Verallgemeinerung von (A.9) und (A.14) auf zeitabhängige Phänomene führt zu den Maxwellgleichungen:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) &= \frac{\varrho(\boldsymbol{r},t)}{\varepsilon_0}\,, & \operatorname{rot} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) + \frac{\partial \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t} &= 0 \\ \operatorname{rot} \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t} &= \mu_0\, \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},t)\,, & \operatorname{div} \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t) &= 0 \end{aligned} \tag{A.15}$$

Die makroskopischen Maxwellgleichungen (29.14) in Materie werden zu

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \boldsymbol{D} &= \varrho_{\text{ext}}\,, & \operatorname{rot} \boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} &= 0 \\ \operatorname{rot} \boldsymbol{H} - \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} &= \boldsymbol{j}_{\text{ext}}\,, & \operatorname{div} \boldsymbol{B} &= 0 \end{aligned} \tag{A.16}$$

Die Responsefunktionen ε und μ treten als Faktoren zu den (Vakuum-)Konstanten ε_0 und μ_0 hinzu,

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon\,\varepsilon_0\,\boldsymbol{E} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{H} = \frac{\boldsymbol{B}}{\mu\,\mu_0} \tag{A.17}$$

B Physikalische Konstanten

Wir stellen einige physikalische Konstanten und Kombinationen solcher Konstanten zusammen, die häufig in Abschätzungen verwendet wurden.

Tabelle B.1 beginnt mit den für die Elektrodynamik wichtigsten physikalischen Konstanten. Dies sind die Lichtgeschwindigkeit c, die Elementarladung e und (für Anwendungen im Atom oder Festkörper) das Plancksche Wirkungsquantum $\hbar$. Daran schließen sich häufig verwendete Längen an.

In Kapitel 5 wurden die Vorzüge des Gauß-Systems für die Theoretische Elektrodynamik erläutert. Für konkrete Abschätzungen gehen wir aber meist zum MKSA-System (Anhang A) über. So werden konkrete Werte der elektrischen Feldstärke in Volt/Zentimeter = V/cm angegeben, und für Energiegrößen wird meist die Einheit *Elektronenvolt* (eV) anstelle von erg benutzt. In eV ist unter e immer die Elementarladung e_{SI} des MKSA-Systems (SI) zu verstehen:

$$\mathrm{eV} \equiv e_{\mathrm{SI}}\,\mathrm{Volt} \approx 1.6 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{CV} = 1.6 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{erg} \tag{B.1}$$

Die Umrechnung von J = CV = Nm in erg wurde in (A.1) angegeben. Der untere Teil von Tabelle B.1 gibt einige Energiegrößen in Elektronenvolt an, die für Abschätzungen nützlich sind.

In der Elektrodynamik in Materie kam auch die Temperatur T vor. Die Temperatur T ist das Maß für die Energie pro Freiheitsgrad im thermischen Gleichgewicht. Aus historischen Gründen wird T aber nicht in Energieeinheiten sondern in Kelvin (K) angegeben. Die Proportionalitätskonstante zwischen Kelvin- und Energieskala ist die Boltzmannkonstante k_{B}:

$$k_{\mathrm{B}}\,\mathrm{K} = 1.38 \cdot 10^{-23}\,\mathrm{J} \tag{B.2}$$

T. Fließbach, *Elektrodynamik*, DOI 10.1007/978-3-8274-3036-6
© Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2012

Tabelle B.1 Physikalische Konstanten, Längen, Frequenzen (siehe auch Tabelle 20.2) und Energiegrößen, die in diesem Buch verwendet wurden.

Bezeichnung	Symbol	Wert
Lichtgeschwindigkeit	c	$2.998 \cdot 10^{10}\ \frac{\text{cm}}{\text{s}}$
Elementarladung (Gauß-System)	e	$4.803 \cdot 10^{-10}\ \frac{\text{g}^{1/2}\,\text{cm}^{3/2}}{\text{s}}$
Elementarladung (MKSA-System)	e_{SI}	$1.602 \cdot 10^{-19}\,\text{C}$
Plancksches Wirkungsquantum	$\hbar$	$1.055 \cdot 10^{-27}\,\text{erg s}$
Feinstrukturkonstante	$\alpha = \frac{e^2}{\hbar c}$	$\frac{1}{137.0}$
Ångström	Å	$1\,\text{Å} \equiv 10^{-8}\,\text{cm}$
Fermi	fm	$1\,\text{fm} \equiv 10^{-13}\,\text{cm}$
Bohrscher Radius	$a_{\text{B}} = \frac{\hbar^2}{m_{\text{e}} e^2}$	$5.3 \cdot 10^{-9}\,\text{cm} = 0.53\,\text{Å}$
Wellenlänge von sichtbarem Licht ($\hbar\omega = 2...3\,\text{eV}$)	λ_{si}	$4 \cdot 10^{-5} \ldots 8 \cdot 10^{-5}\,\text{cm}$
Atomare Frequenz	$\omega_{\text{at}} = \frac{v_{\text{at}}}{a_{\text{B}}} = \frac{\alpha c}{a_{\text{B}}}$	$4.1 \cdot 10^{16}\,\text{s}^{-1}$
Frequenz von sichtbarem Licht	$\omega_{\text{si}} = 2\pi \frac{c}{\lambda_{\text{si}}}$	$2 \ldots 5 \cdot 10^{15}\,\text{s}^{-1}$
Elektronmasse	$m_{\text{e}} c^2$	$0.51\,\text{MeV}$
Protonmasse	$m_{\text{p}} c^2$	$0.94\,\text{GeV}$
Atomare Energieeinheit	$E_{\text{at}} = \frac{e^2}{a_{\text{B}}} = \frac{\hbar^2}{m_{\text{e}} a_{\text{B}}^2}$	$27.2\,\text{eV}$
Skala der Coulombenergie im Atom	$\frac{e^2}{\text{Å}}$	$14.4\,\text{eV}$
Skala der Coulombenergie im Kern	$\frac{e^2}{\text{fm}}$	$1.44\,\text{MeV}$
Zimmertemperatur, $T \approx 290\,\text{K}$	$k_{\text{B}} T$	$290\,k_{\text{B}}\,\text{K} \approx \frac{\text{eV}}{40}$

C Vektoroperationen

Die expliziten Formen der gängigen Vektoroperationen für kartesische Koordinaten x, y, z, Zylinderkoordinaten ρ, φ, z und für Kugelkoordinaten r, θ, ϕ werden zusammengestellt. Die Wirkung des Nabla-Operators auf ein Produkt von Feldern wird angegeben.

Aus (1.19) – (1.21) und (1.17) folgt:

$$\operatorname{grad}\Phi = \begin{cases} \dfrac{\partial\Phi}{\partial x}\,\boldsymbol{e}_x + \dfrac{\partial\Phi}{\partial y}\,\boldsymbol{e}_y + \dfrac{\partial\Phi}{\partial z}\,\boldsymbol{e}_z & \text{(Kartesische Koordinaten)} \\[2ex] \dfrac{\partial\Phi}{\partial\rho}\,\boldsymbol{e}_\rho + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\,\boldsymbol{e}_\varphi + \dfrac{\partial\Phi}{\partial z}\,\boldsymbol{e}_z & \text{(Zylinderkoordinaten)} \\[2ex] \dfrac{\partial\Phi}{\partial r}\,\boldsymbol{e}_r + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\Phi}{\partial\theta}\,\boldsymbol{e}_\theta + \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial\Phi}{\partial\phi}\,\boldsymbol{e}_\phi & \text{(Kugelkoordinaten)} \end{cases} \tag{C.1}$$

$$\operatorname{div}\boldsymbol{V} = \begin{cases} \dfrac{\partial V_x}{\partial x} + \dfrac{\partial V_y}{\partial y} + \dfrac{\partial V_z}{\partial z} \\[2ex] \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial(\rho V_\rho)}{\partial\rho} + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial V_\varphi}{\partial\varphi} + \dfrac{\partial V_z}{\partial z} \\[2ex] \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial(r^2 V_r)}{\partial r} + \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial(\sin\theta\, V_\theta)}{\partial\theta} + \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial V_\phi}{\partial\phi} \end{cases} \tag{C.2}$$

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{V} = \begin{cases} \left(\dfrac{\partial V_z}{\partial y} - \dfrac{\partial V_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{e}_x + \left(\dfrac{\partial V_x}{\partial z} - \dfrac{\partial V_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{e}_y + \left(\dfrac{\partial V_y}{\partial x} - \dfrac{\partial V_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{e}_z \\[2ex] \left(\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial V_z}{\partial\varphi} - \dfrac{\partial V_\varphi}{\partial z}\right)\boldsymbol{e}_\rho + \left(\dfrac{\partial V_\rho}{\partial z} - \dfrac{\partial V_z}{\partial\rho}\right)\boldsymbol{e}_\varphi + \dfrac{1}{\rho}\left(\dfrac{\partial(\rho V_\varphi)}{\partial\rho} - \dfrac{\partial V_\rho}{\partial\varphi}\right)\boldsymbol{e}_z \\[2ex] \dfrac{1}{r\sin\theta}\left(\dfrac{\partial(\sin\theta\, V_\phi)}{\partial\theta} - \dfrac{\partial V_\theta}{\partial\phi}\right)\boldsymbol{e}_r + \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{1}{\sin\theta}\dfrac{\partial V_r}{\partial\phi} - \dfrac{\partial(r V_\phi)}{\partial r}\right)\boldsymbol{e}_\theta \\[2ex] \qquad\qquad + \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\partial(r V_\theta)}{\partial r} - \dfrac{\partial V_r}{\partial\theta}\right)\boldsymbol{e}_\phi \end{cases} \tag{C.3}$$

T. Fließbach, *Elektrodynamik*, DOI 10.1007/978-3-8274-3036-6
© Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2012

Aus (1.24) mit (1.17) folgt

$$\Delta\Phi = \begin{cases} \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} \\[2ex] \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\,\dfrac{\partial\Phi}{\partial\rho}\right) + \dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2} + \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} \\[2ex] \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial^2(r\,\Phi)}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r^2\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\,\dfrac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right) + \dfrac{1}{r^2\sin^2\theta}\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial\phi^2} \end{cases} \tag{C.4}$$

Für Kugelkoordinaten kann man die Radialableitung auch anders schreiben:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^2(r\,\Phi)}{\partial r^2} = \frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\,\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right) \tag{C.5}$$

Für krummlinige Koordinaten ist bei der Auswertung $\Delta\boldsymbol{V}$ die Koordinatenabhängigkeit der Basisvektoren zu berücksichtigen; insbesondere ist $\Delta\boldsymbol{V} \neq \sum_i (\Delta V_i)\,\boldsymbol{e}_i$. Man wird daher im Allgemeinen von (2.27) ausgehen,

$$\Delta\boldsymbol{V} = \operatorname{grad}(\operatorname{div}\boldsymbol{V}) - \operatorname{rot}(\operatorname{rot}\boldsymbol{V}) = \nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{V}) - \nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{V}) \tag{C.6}$$

Folgende Relationen enthalten ebenfalls zwei Nabla-Operatoren:

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad}\Phi = \nabla\times(\nabla\Phi) = 0 \tag{C.7}$$

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\boldsymbol{V} = \nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{V}) = 0 \tag{C.8}$$

Abschließend stellen wir noch die Wirkung des Nabla-Operators auf Produkte von Feldern zusammen:

$$\begin{aligned} \nabla(\Phi\,\Psi) &= (\nabla\Phi)\,\Psi + \Phi\,(\nabla\Psi) \qquad \text{(C.9)} \\ \nabla\cdot(\Phi\,\boldsymbol{V}) &= \boldsymbol{V}\cdot\nabla\Phi + \Phi\,\nabla\cdot\boldsymbol{V} \\ \nabla\times(\Phi\,\boldsymbol{V}) &= (\nabla\Phi)\times\boldsymbol{V} + \Phi\,\nabla\times\boldsymbol{V} \\ \nabla(\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{W}) &= (\boldsymbol{V}\cdot\nabla)\boldsymbol{W} + (\boldsymbol{W}\cdot\nabla)\boldsymbol{V} + \boldsymbol{V}\times(\nabla\times\boldsymbol{W}) + \boldsymbol{W}\times(\nabla\times\boldsymbol{V}) \\ \nabla\cdot(\boldsymbol{V}\times\boldsymbol{W}) &= \boldsymbol{W}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{V}) - \boldsymbol{V}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{W}) \\ \nabla\times(\boldsymbol{V}\times\boldsymbol{W}) &= \boldsymbol{V}\,(\nabla\cdot\boldsymbol{W}) - \boldsymbol{W}\,(\nabla\cdot\boldsymbol{V}) + (\boldsymbol{W}\cdot\nabla)\boldsymbol{V} - (\boldsymbol{V}\cdot\nabla)\boldsymbol{W} \end{aligned}$$

Die Beziehungen ergeben sich aus der Kettenregel, der zyklischen Vertauschbarkeit der Faktoren im Spatprodukt $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) = \boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$ und aus

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\,\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\,\boldsymbol{c} \tag{C.10}$$

Nützlich ist auch noch die Relation

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d}) = (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d}) - (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}) \tag{C.11}$$