Lösungen 9. Übungsblatt
Finanzinstrumente

Aufgabe 1: **a)** Nach Theorem 5.1 aus der Vorlesung ist

$$\begin{aligned} w_{\rm up} &= \frac{e^{\text{Zins pro Periode}} - 1 - {\rm ret}_{\rm down}}{{\rm ret}_{\rm up} - {\rm ret}_{\rm down}} \\ &= \frac{e^{\text{Zins pro Periode}} - 1 - \mu\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}}{2\sigma\sqrt{\Delta t}} \end{aligned}$$

und $w_{\rm down} = 1 - w_{\rm up}$. Ist dann etwa r ein jährlicher Zinssatz und messen wir die Dauer einer Periode Δt in Jahren, dann ist

$$\text{Zins pro Periode} \;=\; r\Delta t$$

Da dies typischerweise eine sehr kleine Zahl ist, etwa mit $r = 5\%$ und $\Delta t = 1/250$ ist $r\Delta t = 1/5000 = 0.0002$, können wir die Näherung

$$\begin{aligned} e^{r\Delta t} &= 1 + r\Delta t + \frac{(r\Delta t)^2}{2!} + \frac{(r\Delta t)^3}{3!} + \cdots \\ &\approx 1 + r\Delta t \end{aligned}$$

machen, so dass

$$\begin{aligned} w_{\rm up} &= \frac{e^{r\Delta t} - 1 - \mu\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}}{2\sigma\sqrt{\Delta t}} \\ &\approx \frac{r\Delta t - \mu\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}}{2\sigma\sqrt{\Delta t}} \\ &= \frac{1 + \frac{r-\mu}{\sigma}\sqrt{\Delta t}}{2} \end{aligned}$$

und damit

$$w_{\rm down} \;=\; 1 - w_{\rm up} \;=\; \frac{1 - \frac{r-\mu}{\sigma}\sqrt{\Delta t}}{2}$$

b) Wir haben mit der Abkürzung $\alpha := \frac{r-\mu}{\sigma}$

$$\frac{w_{\rm up}}{1+{\rm ret}_{\rm up}} + \frac{w_{\rm down}}{1+{\rm ret}_{\rm down}} \;=\; \frac{w_{\rm up}(1+{\rm ret}_{\rm down}) \;+\; w_{\rm down}(1+{\rm ret}_{\rm up})}{(1+{\rm ret}_{\rm up})(1+{\rm ret}_{\rm down})}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \times \frac{(1+\alpha\sqrt{\Delta t})(1+\mu\Delta t - \sigma\sqrt{\Delta t}) \;+\; (1-\alpha\sqrt{\Delta t})(1+\mu\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t})}{\big[(1+\mu\Delta t) + \sigma\sqrt{\Delta t})\big]\big[(1+\mu\Delta t) - \sigma\sqrt{\Delta t})\big]} \\
&= \frac{1}{2} \times \frac{2(1+\mu\Delta t) \;-\; 2\alpha\sqrt{\Delta t}\sigma\sqrt{\Delta t}}{(1+\mu\Delta t)^2 \;-\; \sigma^2\Delta t} \\
&= \frac{1+\mu\Delta t \;-\; \alpha\sigma\Delta t}{1+2\mu\Delta t + \mu^2\Delta t^2 \;-\; \sigma^2\Delta t} \\
&= \frac{1+(2\mu - r)\Delta t}{1+(2\mu-\sigma^2)\Delta t + \mu^2\Delta t^2} \quad .
\end{aligned}
$$

c) Mit der Abkürzung

$$N \quad := T/\Delta t$$

bekommen wir mit der Formel aus Teil (b):

$$
\begin{aligned}
V_0^{\mathrm{Bin}_{\Delta t}} \quad &= \quad e^{-rT} \left\{ \frac{1+(2\mu-r)\frac{T}{N}}{1+(2\mu-\sigma^2)\frac{T}{N} + \mu^2\frac{T^2}{N^2}} \right\}^N \\
&= \quad e^{-rT} \left\{ \frac{1+(2\mu-\sigma^2)\frac{T}{N} + \mu^2\frac{T^2}{N^2} + (\sigma^2 - r)\frac{T}{N} - \mu^2\frac{T^2}{N^2}}{1+(2\mu-\sigma^2)\frac{T}{N} + \mu^2\frac{T^2}{N^2}} \right\}^N \\
&= \quad e^{-rT} \left\{ 1 \;+\; \frac{(\sigma^2 - r)\frac{T}{N} - \mu^2\frac{T^2}{N^2}}{1+(2\mu-\sigma^2)\frac{T}{N} + \mu^2\frac{T^2}{N^2}} \right\}^N \\
&= \quad e^{-rT} \left\{ 1 \;+\; \frac{(\sigma^2 - r)T}{N} \;+\; O\big(\tfrac{1}{N^2}\big) \right\}^N \\
&\overset{N\to\infty}{\to} \quad e^{-rT}\, e^{(\sigma^2 - r)T} \quad = \quad e^{(\sigma^2 - 2r)T}
\end{aligned}
$$

d) Wenn wir etwas allgemeiner den Black-Scholes Preis zur Zeit $t \in [0,T]$ berechnen, bekommen wir:

$$
\begin{aligned}
V_t \;&=\; e^{-r(T-t)} \int_{\mathbb{R}} H\big(S_t\, e^{\sigma\sqrt{T-t}\,x + (r-\sigma^2/2)(T-t)}\big)\, e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} \\
&=\; e^{-r(T-t)} \int_{\mathbb{R}} \frac{S_0}{S_t\, e^{\sigma\sqrt{T-t}\,x + (r-\sigma^2/2)(T-t)}}\, e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} \\
&=\; e^{-r(T-t)} \frac{S_0}{S_t} \int_{\mathbb{R}} e^{-\sigma\sqrt{T-t}\,x \,-\, (r-\sigma^2/2)(T-t)}\, e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} \\
&=\; e^{-r(T-t)} \frac{S_0}{S_t} e^{-\,(r-\sigma^2/2)(T-t)} \int_{\mathbb{R}} e^{-\sigma\sqrt{T-t}\,x}\, e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} \\
&=\; e^{-2r(T-t)} \frac{S_0}{S_t} e^{\sigma^2/2(T-t)} \int_{\mathbb{R}} e^{-\sigma\sqrt{T-t}\,x}\, e^{-\frac{x^2}{2}}\, e^{-\frac{\sigma^2(T-t)}{2}} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}}\, e^{\frac{\sigma^2(T-t)}{2}} \\
&=\; e^{(-2r+\sigma^2)(T-t)} \frac{S_0}{S_t} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}(x-\sigma\sqrt{T-t})^2} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} \\
&=\; e^{(-2r+\sigma^2)(T-t)}\; \frac{S_0}{S_t} \;\times 1 \\
&=\; \frac{S_0}{S_t}\, e^{(\sigma^2-2r)(T-t)} \; .
\end{aligned}
$$

Für $t = 0$ reduziert sich das dann auf

$$\begin{aligned} V_0 &= \tfrac{S_0}{S_0}\, e^{(\sigma^2-2r)(T-0)} \\ &= e^{(\sigma^2-2r)T} \,. \end{aligned}$$

Aufgabe 2: Wir haben

$$\begin{aligned} V_0 &= e^{-rT} \int_{\mathbb{R}} H(S_T)\, e^{-\frac{x^2}{2}} \tfrac{dx}{\sqrt{2\pi}} \\ &= e^{-rT} \int_{\mathbb{R}} \; H\big(S_0\, e^{\sigma\sqrt{T}\,x + (r-\sigma^2/2)T}\big)\, e^{-\frac{x^2}{2}} \tfrac{dx}{\sqrt{2\pi}} \end{aligned}$$

Wegen

$$\begin{aligned} & & S_T &\geq K \\ \Leftrightarrow & & S_0\, e^{\sigma\sqrt{T}\,x + (r-\sigma^2/2)T} &\geq K \\ \Leftrightarrow & & \sigma\sqrt{T}\,x \,+\, (r-\sigma^2/2)T &\geq \log[K/S_0] \\ \Leftrightarrow & & \sigma\sqrt{T}\,x &\geq \log[K/S_0] \,-\, (r-\sigma^2/2)T \\ \Leftrightarrow & & x &\geq \frac{\log[K/S_0] \,-\, (r-\sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} \\ \Leftrightarrow & & x &\geq -\,\frac{\log[S_0/K] \,+\, (r-\sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} \\ \Leftrightarrow & & x &\geq -\,d_- \end{aligned}$$

bekommen wir

$$\begin{aligned} V_0 &= e^{-rT} \int_{\mathbb{R}} H\big(S_0\, e^{\sigma\sqrt{T}\,x + (r-\sigma^2/2)T}\big)\, e^{-\frac{x^2}{2}} \tfrac{dx}{\sqrt{2\pi}} \\ &= e^{-rT} \int_{-d_-}^{\infty} 1\, e^{-\frac{x^2}{2}} \tfrac{dx}{\sqrt{2\pi}} \\ &= e^{-rT} \int_{-\infty}^{d_-} e^{-\frac{x^2}{2}} \tfrac{dx}{\sqrt{2\pi}} \\ &= e^{-rT}\, N(d_-) \,. \end{aligned}$$