Hochschule RheinMain SS 2019
Prof. Dr. D. Lehmann

Lösungen 9. Übungsblatt Lineare Optimierung

1.Aufgabe: Wir teilen die letzte Ungleichung durch 5. Die Standard-Gleichungsform lautet dann (erst teilen, dann die Standard-Gleichungsform nehmen; geht auch ohne teilen, aber dann würden mehr Brüche in der folgenden Rechnung auftreten):

$$F(x, y, s_1, s_2, s_3) \;=\; x + 4y + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3 \;\to\; \max$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} 5x + 3y + s_1 &= 60 \\ x + 2y + s_2 &= 20 \\ y + s_3 &= 8 \end{aligned}$$

und

$$x,\, y, s_1, s_2, s_3 \;\geq\; 0\,.$$

Damit erhalten wir folgendes Start-Tableau:

$$\begin{array}{ccccc|c} 5 & 3 & 1 & 0 & 0 & 60 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 20 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 8 \\ \hline 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & \text{F} \end{array}$$

Offensichtlich ist $\vec{x}_0 = (0, 0, 60, 20, 8)$ eine Start-Ecke und damit

$$B \;=\; B_0 \;=\; \{3, 4, 5\}\,, \qquad N_0 = \{1, 2\}$$

eine Start-Basis. Weiter ist $\vec{c}_B = \vec{0}$ und damit $\Delta F_N = \vec{c}_N = (1, 4)$ und damit ist $i = 2$ entering index. Den leaving index j bestimmen wir aus dem Tableau

$$\begin{array}{ccccc|cc} & & & & & & \lambda \\ 5 & 3 & 1 & 0 & 0 & 60 & 20 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 20 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 8 & 8 \\ \hline 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & \text{F} & \end{array}$$

Also $j = 5$ ist leaving index. Damit:

$$B \;=\; B_1 \;=\; \{2, 3, 4\}\,, \qquad N_0 = \{1, 5\}$$

Wir wenden den Gauss-Algorithmus an, um $\vec{c}_B = \vec{0}$ zu erreichen und A_B eine Permutation der Einheits-Matrix:

$$
\begin{array}{ccccc|c}
5 & 0 & 1 & 0 & -3 & 36 \\
1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 4 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 8 \\
\hline
1 & 0 & 0 & 0 & -4 & F-32
\end{array}
$$

Damit haben wir $i = 1$ als entering index und bestimmen den leaving index aus dem Tableau

$$
\begin{array}{ccccc|cc}
 & & & & & & \lambda \\
5 & 0 & 1 & 0 & -3 & 36 & 7\frac{1}{5} \\
1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 4 & 4 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 8 & \infty \\
\hline
1 & 0 & 0 & 0 & -4 & F-32 &
\end{array}
$$

Also $j = 4$ ist leaving index und damit

$$
B \;=\; B_2 \;=\; \{1, 2, 3\}\,, \qquad N_0 = \{4, 5\}
$$

Wir wenden den Gauss-Algorithmus an, um $\vec{c}_B = \vec{0}$ zu erreichen und A_B eine Permutation der Einheits-Matrix:

$$
\begin{array}{ccccc|c}
0 & 0 & 1 & -5 & 7 & 16 \\
1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 4 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 8 \\
\hline
0 & 0 & 0 & -1 & -2 & F-36
\end{array}
$$

Alle Koeffizienten von ΔF_N sind jetzt negativ und damit haben wir das Maximum erreicht. Also

$$
\vec{x}_{\text{opt}} \;=\; (x, y, s_1, s_2, s_3)_{\text{opt}} \;=\; (4, 8, 16, 0, 0)
$$

und

$$
F_{\text{opt}} \;=\; F(4, 8) \;=\; 4 + 4 \times 8 \;=\; 36\;.
$$

Den Optimalwert von 36 kann man auch direkt aus dem End-Tableau in der letzten Zeile ablesen, da diese ganz rechts immer von der Form $F - F_{\text{opt}}$ sein muss.

2.Aufgabe: Die Standard-Gleichungsform lautet:

$$
F(x, y, z, s_1, s_2, s_3) \;=\; 3x + 2y - 4z + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3 \;\to\; \max
$$

unter den Nebenbedingungen

$$
\begin{aligned}
x + 4y + s_1 &= 5 \\
2x + 4y - 2z + s_2 &= 6 \\
x + y - 2z + s_3 &= 2 \\
x, y, z, s_1, s_2, s_3 &\geq 0\;.
\end{aligned}
$$

Damit erhalten wir die folgende Sequenz von Simplex-Iterationen mit den folgenden Tableaus:

$$
\begin{array}{cccccc|c}
1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 5 \\
2 & 4 & -2 & 0 & 1 & 0 & 6 \\
1 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 2 \\
\hline
3 & 2 & -4 & 0 & 0 & 0 & F
\end{array}
$$

$$B \;=\; B_0 \;=\; \{4,5,6\}\,, \qquad N_0 = \{1,2,3\}$$

$i = 1$ ist entering index,

$$
\begin{array}{cccccc|cc}
 & & & & & & & \lambda \\
1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 5 & 5 \\
2 & 4 & -2 & 0 & 1 & 0 & 6 & 3 \\
1 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\
\hline
3 & 2 & -4 & 0 & 0 & 0 & F &
\end{array}
$$

und $j = 6$ ist leaving index,

$$B \;=\; B_1 \;=\; \{1,4,5\}\,, \qquad N_1 = \{2,3,6\}$$

Gauss-Algorithmus:

$$
\begin{array}{cccccc|c}
0 & 3 & 2 & 1 & 0 & -1 & 3 \\
0 & 2 & 2 & 0 & 1 & -2 & 2 \\
1 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 2 \\
\hline
0 & -1 & 2 & 0 & 0 & -3 & F-6
\end{array}
$$

$i = 3$ ist entering index und

$$
\begin{array}{cccccc|cc}
 & & & & & & & \lambda \\
0 & 3 & 2 & 1 & 0 & -1 & 3 & 3/2 \\
0 & 2 & 2 & 0 & 1 & -2 & 2 & 1 \\
1 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 2 & \infty \\
\hline
0 & -1 & 2 & 0 & 0 & -3 & F-6 &
\end{array}
$$

und $j = 5$ ist leaving index,

$$B \;=\; B_2 \;=\; \{1,3,4\}\,, \qquad N_2 = \{2,5,6\}$$

Gauss-Algorithmus:

$$
\begin{array}{cccccc|c}
0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 1/2 & -1 & 1 \\
1 & 3 & 0 & 0 & 1 & -1 & 4 \\
\hline
0 & -3 & 0 & 0 & -1 & -1 & F-8
\end{array}
$$

Alle Koeffizienten in der letzten Zeile sind negativ, also haben wir das Maximum erreicht:

$$\vec{x}_{\mathrm{opt}} \;=\; (x, y, z, s_1, s_2, s_3)_{\mathrm{opt}} \;=\; (4, 0, 1, 1, 0, 0)$$

und

$$F_{\mathrm{opt}} \;=\; F(4, 0, 1) \;=\; 3 \times 4 + 2 \times 0 - 4 \times 1 \;=\; 12 - 4 \;=\; 8\,.$$