Hochschule RheinMain SS 2019
Prof. Dr. D. Lehmann

4. Übungsblatt zur Vorlesung
Finanzmathematik II

1.Aufgabe: Es sei $\{x_t\}_{t\geq 0}$ eine Brownsche Bewegung. Wir wollen in dieser Aufgabe Erwartungswerte von stochastischen Integralen berechnen. Dazu diskretisieren wir das Intervall

$$[\,0\,,\,T\,] \quad\approx\quad \{\,t_0\,,\,t_1\,,\,t_2\,,\,\cdots\,,\,t_{N-1}\,,\,t_N\,\}$$

mit

$$t_k \;\; = k\,\Delta t$$

und

$$t_N \;=\; N\Delta t \;=\; T$$

so dass also $N = T/\Delta t$ oder $\Delta t = T/N$. Wir betrachten das Ito-Integral

$$I_1 \;:=\; \int_0^T x_t\,dx_t \;=\; \lim_{\Delta t\to 0}\sum_{k=1}^N x_{t_{k-1}}\,(x_{t_k} - x_{t_{k-1}}) \;=:\; \lim_{\Delta t\to 0} I_1(\Delta t)$$

und das sogenannte Stratonovich-Integral

$$I_2 \;:=\; \int_0^T x_t\circ dx_t \;=\; \lim_{\Delta t\to 0}\sum_{k=1}^N \tfrac{x_{t_{k-1}}+x_{t_k}}{2}\,(x_{t_k} - x_{t_{k-1}}) \;=:\; \lim_{\Delta t\to 0} I_2(\Delta t)$$

Erinnern Sie sich daran, dass in diskretisierter Zeit eine Brownsche Bewegung gegeben ist durch

$$x_{t_k} \;=\; \sqrt{\Delta t}\,\sum_{j=1}^k \phi_j$$

mit standard-normalverteilten Zufallszahlen $\{\phi_k\}_{k=1,\ldots,N}$, und dass Erwartungswerte entweder mit dem Theorem 4.1 aus dem Skript oder aber auch wie folgt berechnet werden können:

$$\mathsf{E}[\,\cdot\,] \;=\; \int_{\mathbb{R}^N} \cdot\;\prod_{k=1}^N e^{-\frac{\phi_k^2}{2}}\,\tfrac{d\phi_k}{\sqrt{2\pi}}$$

Zeigen Sie jetzt:

a) Es gilt

$$\mathsf{E}\big[\,I_1(\Delta t)\,\big] \;=\; 0\,.$$

b) Es gilt

$$\mathsf{E}\big[\,I_2(\Delta t)\,\big] \;=\; \frac{T}{2}\,.$$

Die Definitionen für I_1 und I_2 sind also nicht äquivalent, auch nicht im Limes $\Delta t\to 0$.

2.Aufgabe: Wir betrachten dasselbe Setting wie in Aufgabe 1. Für eine beliebige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist das Ito-Integral und das Stratonovich-Integral definiert durch

$$\int_0^T f(x_t)\, dx_t \;:=\; \lim_{\Delta t \to 0} \sum_{k=1}^{N} f(x_{t_{k-1}})\,(x_{t_k} - x_{t_{k-1}}) \tag{Ito}$$

$$\int_0^T f(x_t) \circ dx_t \;:=\; \lim_{\Delta t \to 0} \sum_{k=1}^{N} f\big(\tfrac{x_{t_{k-1}} + x_{t_k}}{2}\big)\,(x_{t_k} - x_{t_{k-1}}) \tag{Stratonovich}$$

In der Vorlesung haben wir die Formel

$$\int_0^T f(x_t) \circ dx_t \;=\; \int_0^T f(x_t)\, dx_t \;+\; \frac{1}{2}\int_0^T f'(x_t)\, dt$$

bewiesen. Verifizieren Sie diese Formel jetzt durch eine geeignete Simulation in Excel/VBA. Plotten Sie dazu die linke und die rechte Seite der diskretisierten Version

$$\sum_{j=1}^{k} f\big(\tfrac{x_{t_{j-1}} + x_{t_j}}{2}\big)\,(x_{t_j} - x_{t_{j-1}}) \;=\; \sum_{j=1}^{k} f(x_{t_{j-1}})\,(x_{t_j} - x_{t_{j-1}}) \;+\; \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k} f'(x_{t_{j-1}})\,\Delta t$$

als Funktion von t_k, also die t_k's als x-Achse und die Summen jeweils als y-Achse.

3.Aufgabe: Wir betrachten dasselbe Setting wie in Aufgabe 1. Für eine beliebige zweimal diffbare Funktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist die Ito-Formel in Integral-Version gegeben durch

$$F(x_T) \;-\; F(x_0) \;=\; \int_0^T F'(x_t)\, dx_t \;+\; \frac{1}{2}\int_0^T F''(x_t)\, dt$$

wobei $\{x_t\}_{t\geq 0}$ eine Brownsche Bewegung ist. Verifizieren Sie diese Formel durch eine geeignete Simulation in Excel/VBA. Erzeugen Sie dazu einen Plot der diskretisierten Version ähnlich wie in Aufgabe 2.