Hochschule RheinMain SS 2018
Prof. Dr. D. Lehmann

Zusammenfassung zum Kapitel 5.1: Allgemeiner Formalismus Simplex Algorithmus

Gegeben sei das lineare Optimierungsproblem in Standard-Gleichungsform

$$F(\vec{x}) \;=\; \vec{c}\cdot\vec{x} \;\to\; \max \tag{1}$$

mit den Vektoren $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ und $\vec{c} \in \mathbb{R}^n$ und den Nebenbedingungen

$$\vec{x} \;\in\; P_=(A,\vec{b}) \;:=\; \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n \,|\; A\vec{x} \,=\, \vec{b} \;\wedge\; \vec{x} \geq \vec{0} \;\right\}$$

mit $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\mathrm{rang}(A) = m < n$ und $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$. Es sei $\vec{x}^{\,\mathrm{alt}}$ eine Ecke von $P_=(A,\vec{b})$ mit Basis B und N sei das Komplement von B, also $N = \{1,...,n\} \setminus B$. Wir nehmen an, dass B und N aus den folgenden Indizes bestehen:

$$B \;=\; \{j_1,...,j_m\}\;, \qquad N \;=\; \{i_1,...,i_{n-m}\}\;.$$

Es gilt also $\vec{x}_B^{\mathrm{alt}} > \vec{0}$ und $\vec{x}_N^{\mathrm{alt}} = \vec{0}$ oder in Koordinaten

$$x_{j_1}^{\mathrm{alt}} > 0 \;\;,\;\; \cdots \;\;,\;\; x_{j_m}^{\mathrm{alt}} > 0 \quad \text{und} \quad x_{i_1}^{\mathrm{alt}} = 0 \;\;,\;\; \cdots \;\;,\;\; x_{i_{n-m}}^{\mathrm{alt}} = 0$$

und die Spaltenvektoren $\vec{a}_{j_1}, \cdots, \vec{a}_{j_m}$ von

$$A_B \;:=\; \begin{pmatrix} | & & | \\ \vec{a}_{j_1} & \cdots & \vec{a}_{j_m} \\ | & & | \end{pmatrix} \;\in\; \mathbb{R}^{m\times m}$$

sind linear unabhängig und bilden eine Basis des $\mathbb{R}^m$.

a) Um eine neue Ecke zu finden, machen wir den Ansatz

$$\vec{x}^{\,\mathrm{neu}} \;=\; \vec{x}^{\,\mathrm{alt}} \;+\; \lambda\,\delta\vec{x} \tag{2}$$

mit $\delta\vec{x} = (\delta\vec{x}_B, \delta\vec{x}_N)$ und

$$\delta\vec{x}_N \;=\; \vec{e}_p \;\in\; \mathbb{R}^{n-m} \tag{3}$$

wobei $\vec{e}_p$ der p-te Standardbasisvektor im $\mathbb{R}^{n-m}$ ist, $1 \leq p \leq n-m$. Wenn wir etwa das $\delta\vec{x}_N$ als Vektor im $\mathbb{R}^n$ auffassen wollen, indem wir in alle B-Koordinaten eine 0 reinschreiben, dann haben wir $\delta\vec{x}_N = \vec{e}_{i_p} \in \mathbb{R}^n$. Durch die Forderung

$$A\vec{x}^{\,\mathrm{neu}} \;\stackrel{!}{=}\; \vec{b}$$

und die Gleichungen (2) und (3) ist $\delta\vec{x}_B$ und damit $\delta\vec{x}$ bereits eindeutig festgelegt, es gilt

$$\delta\vec{x}_B \;=\; -A_B^{-1}\,\vec{a}_{i_p}$$

und damit

$$\vec{x}^{\,\text{neu}} \;=\; \vec{x}^{\,\text{alt}} \;+\; \lambda\left(-A_B^{-1}\,\vec{a}_{i_p}\,,\,\vec{e}_p\right) \tag{4}$$

b) Es sei $\vec{c} = (\vec{c}_B, \vec{c}_N)$ der Vektor aus der Zielfunktion aus Gleichung (1). Wir berechnen den Unterschied zwischen $F(\vec{x}^{\,\text{neu}})$ und $F(\vec{x}^{\,\text{alt}})$:

$$F(\vec{x}^{\,\text{neu}}) \;-\; F(\vec{x}^{\,\text{alt}}) \;=\; \lambda\,\Delta F_{i_p}$$

mit

$$\Delta F_{i_p} \;=\; -\vec{c}_B\,A_B^{-1}\,\vec{a}_{i_p} \;+\; c_{i_p} \tag{5}$$

Wir können die ΔF_{i_p} in dem Zeilenvektor

$$\Delta\vec{F}_N \;=\; -\vec{c}_B\,A_B^{-1}\,A_N \;+\; \vec{c}_N \;\in\; \mathbb{R}^{n-m} \tag{6}$$

zusammenfassen. Derjenige Index i_p, für welchen das ΔF_{i_p} maximal und positiv ist (falls alle ΔF_{i_p} negativ sind, haben wir das Maximum bereits erreicht), wird neu in die Basis B aufgenommen, dieses i_p ist **entering index**.

c) Das $\vec{x}^{\,\text{neu}}$ aus Gleichung (4) kann nur dann eine Ecke sein, wenn auch wieder $\vec{x}^{\,\text{neu}} \geq \vec{0}$ gilt. Dazu können wir das λ so lange grösser machen, bis eine der B-Koordinaten von

$$\vec{x}_B^{\,\text{alt}} \;-\; \lambda\,A_B^{-1}\,\vec{a}_{i_p} \;\overset{!}{\geq}\; \vec{0}$$

irgendwann mal 0 wird. Es sei j_q diese B-Koordinate, die als erstes 0 wird. Dieses j_q ist dann der **leaving index** und wird aus der Basis B entfernt.

d) Wir definieren jetzt also ein neues B und ein neues N durch

$$\begin{aligned} B^{\text{neu}} &= \left(B^{\text{alt}} \setminus \{j_q\}\right) \cup \{i_p\} \\ N^{\text{neu}} &= \left(N^{\text{alt}} \setminus \{i_p\}\right) \cup \{j_q\} \end{aligned}$$

Die Spaltenvektoren von A, die zu diesem B^{neu} gehören, bilden dann wieder eine Basis des $\mathbb{R}^m$. Jetzt haben wir eine Iteration des Simplex-Algorithmus abgeschlossen. Mit dem neuen B und dem neuen N gehen wir jetzt zurück nach (a) und machen wieder einen Ansatz (2) um eine neue Ecke zu bestimmen. Wir haben das Maximum gefunden, wenn alle ΔF_{i_p} aus Gleichung (5) oder (6) negativ sind.