

## 9. Übungsblatt zur Vorlesung Finanzmathematik II

**1. Aufgabe:** Es seien  $\phi_1, \dots, \phi_n$  unabhängige, standard-normalverteilte Zufallsvariablen. Insbesondere gelte also

$$E[\phi_i] = 0, \quad E[\phi_i^2] = 1$$

und

$$E[\phi_i \phi_j] = 0 \quad \text{für } i \neq j.$$

Weiter seien  $\vec{a} = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$  und  $\vec{b} = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$  zwei Vektoren im  $\mathbb{R}^n$ . Wir definieren die Zufallsvariablen  $\psi$  und  $\xi$  durch

$$\begin{aligned} \psi &:= \sum_{i=1}^n a_i \phi_i = \vec{a} \cdot \vec{\phi} \\ \xi &:= \sum_{i=1}^n b_i \phi_i = \vec{b} \cdot \vec{\phi} \end{aligned}$$

Berechnen Sie die folgenden Größen:

- Die Erwartungswerte  $E[\psi]$  und  $E[\xi]$
- Die Varianzen  $V[\psi]$  und  $V[\xi]$
- Die Kovarianz  $\text{Cov}[\psi, \xi]$
- Die Korrelation  $\text{Corr}[\psi, \xi]$

Die Zufallsvariablen  $\psi$  und  $\xi$  sind wieder normalverteilt (nicht notwendig standard-normalverteilt, also nicht notwendig mit Varianz 1). Wenn Sie das jetzt beweisen sollten, welche mathematische Aussage genau müssten Sie dann zeigen?

**2. Aufgabe:** Zu einer gegebenen symmetrischen, positiv semidefiniten Matrix lässt sich immer eine Cholesky-Wurzel finden, die untere Dreiecksform hat. Wir wollen uns das hier am Beispiel einer  $3 \times 3$  Korrelationsmatrix klarmachen. Es sei also

$$\rho = \begin{pmatrix} 1 & \rho_{12} & \rho_{13} \\ \rho_{12} & 1 & \rho_{23} \\ \rho_{13} & \rho_{23} & 1 \end{pmatrix}$$

..*bitte wenden*

und wir möchten ein  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  finden mit  $AA^T = \rho$  und  $A$  hat untere Dreiecksform. Machen Sie dazu den Ansatz

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

und bestimmen Sie dann nacheinander  $a_{11}, a_{21}, a_{22}, a_{31}, a_{32}$  und  $a_{33}$  genau in dieser Reihenfolge.

**3.Aufgabe:** Simulieren Sie in Excel/VBA zwei Black-Scholes Underlyings, deren Brownsche Bewegungen mit Korrelation  $\rho$  korreliert sind. Also, für  $i \in \{1, 2\}$

$$\frac{dS_{i,t}}{S_{i,t}} = \mu_i dt + \sigma_i dx_{i,t}$$

mit

$$dx_{1,t} \cdot dx_{2,t} = \rho dt$$

und etwa  $S_{1,0} = S_{2,0} = 100$ . Plotten Sie die Pfade für einen Zeithorizont von, vielleicht,  $T = 4$  Jahren und schauen Sie sich die Diagramme für verschiedene Werte von  $\rho \in \{-0.95, 0.00, 0.95\}$  an.