Hochschule RheinMain SS 2018
Prof. Dr. D. Lehmann

8. Übungsblatt zur Vorlesung
Finanzmathematik II

1.Aufgabe: In der Vorlesung haben wir im Teil (a) des Theorems 13.5 die folgende Formel bewiesen:

$$\mathsf{E}_W\Big[F\big(\textstyle\int_0^T \sigma_t\,dx_t\big)\Big] \;=\; \displaystyle\int_{\mathbb{R}} F\big(\sigma_{\mathrm{imp},T}\sqrt{T}\,x\big)e^{-\frac{x^2}{2}}\,\tfrac{dx}{\sqrt{2\pi}} \tag{1}$$

mit

$$\sigma_{\mathrm{imp},T} \;:=\; \big\{\tfrac{1}{T}\textstyle\int_0^T \sigma_t^2\,dt\big\}^{1/2}$$

Wir wollen die Formel (1) für den Fall $F(y) := y^2$ betrachten.

a) Vereinfachen Sie die rechte Seite von (1) soweit wie möglich für den Fall $F(y) = y^2$.

b) Berechnen Sie die linke Seite von (1) direkt mit Hilfe der Diskretisierung $(N_T = T/\Delta t\,)$

$$\begin{aligned}\mathsf{E}_W\Big[\big(\textstyle\int_0^T \sigma_t\,dx_t\big)^2\Big] &= \mathsf{E}_W\Big[\,\textstyle\int_0^T \sigma_t\,dx_t \times \int_0^T \sigma_u\,dx_u\,\Big]\\ &= \lim_{\Delta t\to 0}\mathsf{E}_W\Big[\,\sum_{j=1}^{N_T}\sigma_{t_j}\sqrt{\Delta t}\,\phi_j \times \sum_{k=1}^{N_T}\sigma_{t_k}\sqrt{\Delta t}\,\phi_k\,\Big]\end{aligned}$$

und erinnern Sie sich daran, wie das Wiener-Maß in den ϕ-Variablen aussah. Ihr Ergebnis sollte mit dem aus Teil (a) übereinstimmen.

c) Beweisen Sie jetzt die Ito-Isometrie: Für beliebige Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gilt

$$\mathsf{E}_W\Big[\,\textstyle\int_0^T f(t)\,dx_t \times \int_0^T g(t)\,dx_t\,\Big] \;=\; \textstyle\int_0^T f(t)g(t)\,dt$$

Gehen Sie dazu analog zu Teil (b) vor.

2.Aufgabe: Ein Underlying S_t wurde an das zeitabhängige Black-Scholes Modell kalibriert und es wurden folgende instantane Volatilitäten gefunden (die Zeiten sind in Jahren angegeben):

$$\sigma_t \;=\; \begin{cases} 30\% & \text{fuer } t \in [0, 0.5] \\ 25\% & \text{fuer } t \in (0.5, 1] \\ 20\% & \text{fuer } t \in (1, 2] \end{cases}$$

..bitte wenden

Der jährliche Zinssatz r betrage $r = 3\%$. Berechnen Sie den Preis V_0 des 'performance-type' Puts mit payoff

$$H(S_T) \quad = \quad \max\{80\% - S_T/S_0, 0\}$$

mit Laufzeit $T = 2$ Jahren im zeitabhängigen Black-Scholes Modell.

3.Aufgabe: Für einen Standard At The Money Call mit Laufzeiten T_i werden am Markt folgende implizite Volatilitäten beobachtet:

Laufzeit in Jahren:	0.25	0.5	1	2
implizite Volatilität:	25%	21%	19%	20%

Kalibrieren Sie ein zeitabhängiges Black-Scholes Modell derart, so dass dieses die am Markt beobachteten impliziten Volatilitäten aus der obigen Tabelle reproduziert. Wählen Sie dazu eine stückweise konstante Funktion $t \to \sigma_t$ für die instantane Volatilität im BSTD Modell.

4.Aufgabe: Gehen Sie zu der Seite

`http://www.eurexchange.com/exchange-de/produkte/idx/dax/DAX--Optionen/17256`

und suchen Sie sich zu den Laufzeiten (das ist jeweils der dritte Freitag in dem Monat)

$$\begin{aligned} T_1 &= \text{Sep 2018} \\ T_2 &= \text{Dez 2018} \\ T_3 &= \text{Jun 2019} \\ T_4 &= \text{Dez 2019} \end{aligned}$$

diejenigen Call-Optionen heraus, deren Ausübungspreis K am naechsten am aktuellen Basispreis S_0 des Underlyings liegt, also deren Strike am nächsten am aktuellen Indexstand des DAX liegt. Diese Optionen werden typischerweise am liquidesten gehandelt. Notieren Sie sich die Angebots- und Verkaufspreise, die sogenannten Geld- und Brief-Preise (englisch: bid and ask) und berechnen Sie dann die impliziten Volatilitäten dazu. Der Einfachheit halber nehmen wir mal an, dass die Zinsen 0 sind. Zur konkreten Berechnung können Sie etwa das Excel-sheet `BlackScholesMonteCarlo.xlsm` benutzen, in dem ja ebenfalls die analytischen Black-Scholes Formeln für Call- und Put-Optionen implementiert sind.