

7. Übungsblatt zur Vorlesung Finanzmathematik II

1. Aufgabe: Wir betrachten einen Preisprozess $\{S_t\}_{0 \leq t \leq T}$ im zeitabhängigen Black-Scholes Modell gegeben durch die SDE

$$dS_t/S_t = \mu_t dt + \sigma_t dx_t \quad (1)$$

Wir betrachten einen Zeithorizont von $T = 2$ Jahren und die instantane Volatilität σ_t sei gegeben durch

$$\sigma_t = \begin{cases} \sigma_1 = 70\% & \text{für } 0 \leq t \leq 1 \\ \sigma_2 = 10\% & \text{für } 1 < t \leq 2 \end{cases}$$

Für den Drift μ_t wählen wir

$$\mu_t = \begin{cases} \mu_1 = 15\% & \text{für } 0 \leq t \leq 1 \\ \mu_2 = 1\% & \text{für } 1 < t \leq 2 \end{cases}$$

- Stellen Sie die Werte von σ_1, σ_2 und μ_1, μ_2 sowie $M_{\text{year}} = 250$, die Anzahl der Zeitschritte pro Jahr, auf einem Excel-sheet als Input-Parameter bereit und simulieren Sie dann einige Pfade mit der Dynamik (1). Plotten Sie die Pfade als Funktion von der Zeit.
- Für eine Zeitreihe mit insgesamt M Beobachtungsdaten und M_{year} Beobachtungsdaten pro Jahr ist die jährliche realisierte Volatilität definiert durch

$$\sigma_{\text{realized}} := \sqrt{\frac{M_{\text{year}}}{M} \sum_{k=1}^M [\text{ret}(t_k)]^2} \quad (2)$$

Wenn also jedes Jahr dieselbe Anzahl M_{year} an Beobachtungsdaten hat (ist bei Simulationen immer der Fall, aber die tatsächliche Anzahl der Banking Days pro Jahr variiert immer etwas um die Zahl 250 herum) und T die Laufzeit in Jahren ist, dann ist $M = M_{\text{year}} \times T$. Die Returns $\text{ret}(t_k)$ sind gegeben durch

$$\text{ret}(t_k) := \frac{S(t_k) - S(t_{k-1})}{S(t_{k-1})}.$$

Berechnen Sie jetzt für einige der simulierten Pfade aus Teil (a) jeweils die realisierte Volatilität des ersten Jahres und des zweiten Jahres (wenn Sie die realisierte Volatilität für genau ein Jahr berechnen sollen, dann ist $M = M_{\text{year}}$), sowie die realisierte Volatilität für den gesamten 2-jahres Zeitraum (dann ist also $M = 2M_{\text{year}}$).

..bitte wenden

2.Aufgabe: Laden Sie sich aus dem Internet (etwa von Yahoo Finance) die DAX-Zeitreihe sowie die Zeitreihe für die Commerzbank-Aktie herunter (oder ein anderes Underlying Ihrer Wahl), für den Zeitraum 1. Januar 2008 bis 31. Dezember 2017, und berechnen Sie dann für jedes der 10 Jahre 2008, 2009, ... , 2017 die jährliche realisierte Volatilität. Berechnen Sie dann ebenfalls die jährliche realisierte Volatilität für den gesamten 10-jahres Zeitraum.

3.Aufgabe: In der Vorlesung haben wir in dem Lemma 13.3 gezeigt, dass der Preisprozess

$$S_t = S_0 e^{\int_0^t \sigma_u dx_u + \int_0^t (\mu_u - \sigma_u^2/2) du}$$

die SDE für das zeitabhängige Black-Scholes Modell erfüllt,

$$dS_t/S_t = \mu_t dt + \sigma_t dx_t .$$

Überprüfen Sie diese Aussage durch eine geeignete Excel/VBA Simulation. Erweitern Sie dazu Ihre Implementation aus dem Teil (a) der ersten Aufgabe in geeigneter Art und Weise.