6. Übungsblatt zur Vorlesung
Finanzmathematik II

1.Aufgabe (Monte Carlo Simulation, Teil2): Der $t = 0$ Preis V_0 einer Option H mit Auszahlung

$$H \;=\; H\big(\{S_t\}_{0\leq t\leq T}\big) \tag{1}$$

im Black-Scholes Modell ist gegeben durch den diskontierten Erwartungswert

$$V_0 \;=\; e^{-rT}\,\mathsf{E}_W\big[\,H(\{S_t\}_{0\leq t\leq T})\,\big] \tag{2}$$

Dabei ist der Preisprozess S_t in (2) gegeben durch den Risiko-neutralen Preisprozess, gegeben durch die SDE

$$dS_t/S_t \;=\; r\,dt \;+\; \sigma\,dx_t \tag{3}$$

und $\mathsf{E}_W[\,\cdot\,]$ ist der Erwartungswert bezüglich des Standard-Wienermaßes. Zur Monte Carlo Berechnung von (2) diskretisieren wir

$$[0,T] \;\approx\; \{\,0\,,\,\Delta t\,,\,2\Delta t\,,\,\cdots\,,N\Delta t\,\} \;=:\; \{t_0,t_1,t_2,\cdots,t_N\} \tag{4}$$

mit $N := T/\Delta t$ so dass das Wienermaß dW und Brownsche Bewegung x_{t_k} gegeben sind durch

$$x_{t_k} \;=\; \sqrt{\Delta t}\sum_{j=1}^{k}\phi_k\,, \qquad\qquad dx_{t_k} \;=\; \sqrt{\Delta t}\,\phi_k \tag{5}$$

$$dW(\{\phi_k\}_{1\leq k\leq N}) \;=\; \prod_{k=1}^{N} e^{-\frac{\phi_k^2}{2}}\,\frac{d\phi_k}{\sqrt{2\pi}} \tag{6}$$

und die SDE (3) gegeben ist durch

$$S_{t_k} \;=\; S_{t_{k-1}}\big(\,1 \;+\; r\,\Delta t \;+\; \sigma\sqrt{\Delta t}\,\phi_k\,\big) \tag{7}$$

Wir müssen dann einen Erwartungswert von der Form (wie auf dem letzten Übungsblatt)

$$\mathsf{E}_W[F] \;=\; \int_{\mathbb{R}^N} F(\phi)\;p(\phi)\;d^N\phi \tag{8}$$

berechnen mit $d = N$,

$$p(\phi) \;=\; p\big(\{\phi_k\}_{1\leq k\leq N}\big) \;\;:=\;\; \tfrac{1}{(2\pi)^{N/2}}\;e^{-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\phi_k^2} \tag{9}$$

und $F:\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}$,

$$F(\phi) \;=\; F\big(\{\phi_k\}_{1\leq k\leq N}\big) \;\;:=\;\; H\big(\{S_{t_k}\}_{0\leq t_k\leq t_N}\big) \tag{10}$$

wobei die $S_{t_k} = S_{t_k}(\{\phi_j\}_{1\leq j\leq k})$ durch Iteration von (7) als Funktion der ϕ_k berechnet werden können. Die Monte Carlo Berechnung von (2) würde also folgendermaßen aussehen:

(i) Diskretisiere das Intervall $[0,T]$ mit N Zeitschritten der Länge $\Delta t := T/N$. Eine typische Wahl wäre hier etwa $N = 250$ (= Anzahl der Handelstage pro Jahr) Zeitschritte pro Jahr.

(ii) Wähle eine Anzahl M von Monte Carlo Simulationen (etwa $M = 10000$ oder $M = 100000$) und erzeuge $N \cdot M$ standard-normalverteilte Zufallszahlen

$$\begin{array}{lcccc} \text{für Pfad } 1: & \phi_1^{(1)} & \phi_2^{(1)} & \cdots & \phi_N^{(1)} \\ & & \vdots & & \\ \text{für Pfad } i: & \phi_1^{(i)} & \phi_2^{(i)} & \cdots & \phi_N^{(i)} \\ & & \vdots & & \\ \text{für Pfad } M: & \phi_1^{(M)} & \phi_2^{(M)} & \cdots & \phi_N^{(M)} \end{array} \tag{11}$$

(iii) Setze $S_{t_0}^{(i)} := S_0 =$ aktueller Wert des Basiswertes S und berechne den i-ten Pfad

$$\text{Pfad}_i \;:=\; \Big\{\, S_{t_k}^{(i)}\Big(\{\phi_j^{(i)}\}_{1\leq j\leq k}\Big)\,\Big\}_{1\leq k\leq N} \tag{12}$$

durch Iteration von (7).

(iv) Die Monte Carlo Approximation für den Preis V_0 aus (2) ist dann gegeben durch

$$\begin{aligned} V_0 \;&\approx\; e^{-rT}\,\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} H\Big(\{S_{t_k}^{(i)}\}_{1\leq k\leq N}\Big) \\ &=\; e^{-rT}\,\frac{1}{\text{Anzahl Pfade}}\sum_{\text{Pfade}} H\big(\,\text{Pfad}\,\big)\,. \end{aligned} \tag{13}$$

Erstellen Sie jetzt ein Excel-Sheet, auf dem Sie den Monte Carlo Preis einer Standard Call- und Put-Option mit Hilfe einer Monte Carlo Simulation berechnen können. Überprüfen Sie Ihren Monte Carlo Preis mit Hilfe der analytischen Black-Scholes Formeln.

2.Aufgabe: Erstellen Sie ein Excel-Sheet, auf dem Sie den Monte Carlo Preis einer Down-and-Out Barrier Call-Option im Black-Scholes Modell mit Hilfe einer Monte Carlo Simulation berechnen können. Überprüfen Sie Ihren Monte Carlo Preis mit Hilfe der analytischen Formel aus Theorem 11.1.