

5. Übungsblatt zur Vorlesung Finanzmathematik II

1. Aufgabe (Monte Carlo Simulation): Es sei

$$p : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$$

eine ein- oder mehrdimensionale ($d = 1$ oder $d > 1$) Wahrscheinlichkeitsdichte, also $p \geq 0$ und

$$\int_{\mathbb{R}^d} p(\phi) d^d \phi = 1 .$$

Weiter sei $F : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, von der wir mit Hilfe der Monte Carlo Methode den Erwartungswert bezüglich p berechnen wollen¹:

$$\mathbb{E}[F] := \int_{\mathbb{R}^d} F(\phi) p(\phi) d^d \phi$$

Dazu erzeugt man N (dieses N heisst dann auch die Anzahl der Monte Carlo Simulationen) p -verteilte, unabhängige Zufallszahlen

$$(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N) \in (\mathbb{R}^d)^N = \mathbb{R}^{dN}$$

und bildet die Monte Carlo Summe (beachten Sie, dass nur das F in der Monte Carlo Summe auftaucht, das p steckt schon in den Zufallszahlen drin)

$$S_N(F) := \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N F(\phi_i)$$

etwa mit $N = 10000$ oder $N = 100000$. Grundlage der Monte Carlo Berechnung ist folgende approximative Identität, die eine unmittelbare Folge des zentralen Grenzwertsatzes der Wahrscheinlichkeitstheorie ist:

$$\mathbb{P}\left(|S_N(F) - \mathbb{E}[F]| \geq \alpha \sqrt{\frac{\mathbb{V}[F]}{N}} \right) \approx 2 \int_{-\infty}^{-\alpha} e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} = 2 \Phi(-\alpha)$$

Das heisst, mit einer Wahrscheinlichkeit von 99% ist

$$S_N(F) - 2.58 \sqrt{\frac{\mathbb{V}[F]}{N}} \leq \mathbb{E}[F] \leq S_N(F) + 2.58 \sqrt{\frac{\mathbb{V}[F]}{N}}$$

¹ist p eine diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilung, so ist das Integral durch eine entsprechende Summe zu ersetzen

und mit einer Wahrscheinlichkeit von 99.99% ist

$$S_N(F) - 3.89\sqrt{\frac{V[F]}{N}} \leq E[F] \leq S_N(F) + 3.89\sqrt{\frac{V[F]}{N}}$$

Dabei sind

$$-2.58 = \Phi^{-1}\left(\frac{1\%}{2}\right) \quad \text{und} \quad -3.89 = \Phi^{-1}\left(\frac{0.01\%}{2}\right)$$

und die Varianz $V[F]$ ist gegeben durch

$$V[F] = E[F^2] - E[F]^2 = \int_{\mathbb{R}^d} F(\phi)^2 p(\phi) d^d\phi - \left(\int_{\mathbb{R}^d} F(\phi) p(\phi) d^d\phi \right)^2.$$

In dieser Aufgabe wollen wir die Monte Carlo Approximationsformel

$$E[F] \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N F(\phi_i) \quad (1)$$

sowie die Abschätzung für den Fehler

$$\left| E[F] - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N F(\phi_i) \right| \leq \frac{\text{const}_d}{\sqrt{N}} \quad (2)$$

durch explizite Simulation in Excel/VBA an 2 Beispielen, ein eindimensionales ($d = 1$) und ein mehrdimensionales ($d = 3$), verdeutlichen:

a) Überprüfen Sie, für $m = 2$, $m = 4$ und $m = 6$, die Formel (m gerade, sonst 0)

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^m e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} = (m-1)!!$$

mit Hilfe einer Monte Carlo Simulation, indem Sie normalverteilte Zufallszahlen verwenden. Was also genau ist F und was ist p ? Plotten Sie die Monte Carlo Summe, die rechte Seite von (1), für

$$N \in \{1000, 2000, 3000, \dots, 48000, 49000, 50000\} \quad (3)$$

Tragen Sie in diesen Plot ebenfalls das exakte Resultat als rote, horizontale Linie ein. Berechnen und plotten Sie dann, vielleicht nur für $m = 4$, den Fehlerterm

$$\text{mc_error} = E[F] - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N F(\phi_i) \quad (4)$$

für die Werte von N aus (3). Plotten Sie ebenfalls die Größen $\sqrt{N} \times \text{mc_error}$ und $N \times \text{mc_error}$ als Funktion von N .

b) Überprüfen Sie die Formel

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \chi(0 \leq x + y + z \leq 1) dx dy dz = \frac{1}{3!}$$

mit Hilfe einer Monte Carlo Simulation, indem Sie auf dem Intervall $[0,1]$ gleichverteilte Zufallszahlen verwenden. Was also genau ist F und was ist p ? Plotten Sie die Monte Carlo Summe, die rechte Seite von (1), für die Werte von N aus (3). Tragen Sie in diesen Plot ebenfalls das exakte Resultat als rote, horizontale Linie ein. Berechnen und plotten Sie dann den Fehlerterm mc_error aus (4) für die Werte von N aus (3). Plotten Sie ebenfalls die Grössen $\sqrt{N} \times \text{mc_error}$ und $N \times \text{mc_error}$ als Funktion von N .

2.Aufgabe: Gegeben sei das Integral

$$I := \int_{-1}^2 e^{-x^2} dx$$

a) Geben Sie den Wert von I mit Hilfe der $\Phi(x)$ oder $N(x)$ -Funktion an,

$$\Phi(x) = N(x) = \int_{-\infty}^x e^{-\frac{y^2}{2}} \frac{dy}{\sqrt{2\pi}}$$

b) Berechnen Sie den numerischen Wert von I mit Hilfe einer Monte Carlo Simulation in Excel/VBA, indem Sie normalverteilte Zufallszahlen verwenden. Was ist F und was ist die Wahrscheinlichkeitsdichte p ?

c) Berechnen Sie den numerischen Wert von I mit Hilfe einer Monte Carlo Simulation in Excel/VBA, indem Sie uniforme oder gleichverteilte Zufallszahlen benutzen. Was ist F und was ist die Wahrscheinlichkeitsdichte p ?