

4. Übungsblatt zur Vorlesung Finanzmathematik II

1. Aufgabe: Eine Down-and-Out Barrier Call-Option mit Strike = Barrier, $K = B$, ist ein häufig von Banken vertriebenes Produkt. Während viele Optionen bei den meisten Anbietern denselben Namen haben (ein Bonus-Zertifikat etwa, siehe Aufgabe 2, heisst überall Bonus-Zertifikat), so gibt es für dieses Produkt bei unterschiedlichen Anbietern auch unterschiedliche Namen.¹ Der Payoff ist also gegeben durch

$$H(\{S_t\}_{0 \leq t \leq T}) = \max\{S_T - K, 0\} \times \chi\left(\min_{t \in [0, T]} S_t > B\right) \quad \text{mit } K = B.$$

Nehmen Sie an, dass die Preisdynamik des Underlyings durch das Black-Scholes Modell gegeben ist,

$$dS_t/S_t = \mu dt + \sigma dx_t$$

und nehmen Sie weiterhin an, dass die Zinsen Null sind, $r = 0$. Es sei $V_t = V_t(S_t, \min_{u \in [0, t]} S_u)$ der Zeit- t Preis dieser Option im Black-Scholes Modell. Zeigen Sie mit Hilfe der analytischen Preis-Formel aus Theorem 11.1:

$$V_t = \begin{cases} S_t - K & \text{falls } \min_{u \in [0, t]} S_u > B = K \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wie lautet also die Replikationsstrategie für diesen Payoff?

2. Aufgabe: Ein sogenanntes ‘Bonus-Zertifikat’ mit Barriere B und Bonus-Level b (etwa $B = 70\% \times S_0$ und $b = 20\%$) ist eine Option H mit folgendem Payoff:

$$H(\{S_t\}_{0 \leq t \leq T}) := \begin{cases} \max\{(1+b)S_0, S_T\} & \text{falls } \min_{t \in [0, T]} S_t \geq B \\ S_T & \text{falls } \min_{t \in [0, T]} S_t < B \end{cases}$$

- a) Skizzieren Sie den Payoff für die beiden Fälle $\min_{t \in [0, T]} S_t \geq B$ und $\min_{t \in [0, T]} S_t < B$ als Funktion von S_T .

..bitte wenden

¹bei der HVB/UniCredit, www.onemarkets.de, wird diese Option als ‘Turbo-Bull’ bezeichnet, während etwa bei der Deutschen Bank, www.xmarkets.de, dieses Produkt als ‘Wave’ bezeichnet wird.

- b) Der Payoff lässt sich aus dem Underlying selber und einer geeigneten Down-and-Out Barrier Option (Call oder Put) zusammensetzen, wie genau?

Die Tätigkeit, kompliziertere Payoffs aus einfacheren zusammensetzen, bezeichnet man auch als ‘Strukturieren’ und die Leute, die damit ihr Geld verdienen, dementsprechend als ‘Strukturierer’.

3.Aufgabe: Berechnen Sie mit einem Taschenrechner und der Tabelle für die $N(x)$ -Funktion den Black-Scholes Preis eines Down-and-Out Barrier Calls mit folgenden Parametern:

$$\begin{aligned} \text{Laufzeit } T &= 1 \text{ Jahr} \\ \text{aktueller Preis des Underlyings } S_0 &= 100 \\ \text{Barriere } B &= 80 \\ \text{Strike } K &= 100 \\ \text{Zinsen } r &= 0 \\ \text{Volatilitaet } \sigma &= 30\% \end{aligned}$$

Um wieviel tut das Vorhandensein der Barriere den Preis verbilligen im Vergleich zu einem Standard-Call?