Hochschule RheinMain
Prof. Dr. D. Lehmann SS 2018

**3. Übungsblatt zur Vorlesung
Finanzmathematik II**

1.Aufgabe: Es sei $\{x_t\}_{t\geq 0}$ eine Brownsche Bewegung und $a>0$ sei eine positive reelle Zahl. Für den Level a definieren wir eine Stopzeit τ_a, auch 'first hitting time' genannt, durch

$$\tau_a(\{x_t\}_{t\geq 0}) \;:=\; \inf\{\, t\geq 0 \mid x_t = a \,\}$$

Beweisen Sie:

$$\mathsf{P}\big[\,\tau_a \in (t,t+dt)\,\big] \;=\; \tfrac{a}{\sqrt{2\pi}\,t^{3/2}}\, e^{-\frac{a^2}{2t}}\, dt \tag{1}$$

Dazu dürfen Sie das Resultat (10.21) aus dem Theorem 10.5 aus dem Skript benutzen. Das war folgende Aussage:

$$\mathsf{P}\big[\max_{s\in[0,t]} x_s \geq a\,\big] \;=\; 2\,\mathsf{P}\big[\,x_t\geq a\,\big]\,.$$

Überlegen Sie sich zunächst, wie Sie die Menge $\{\,\tau_a \in (t,t+dt)\,\}$ durch Mengen der Form $\{\,\max_{s\in[\,0,\tilde t\,]} x_s \geq a\,\}$ ausdrücken können, für geeignete $\tilde t$. Überlegen Sie sich dann, durch welchen analytischen Ausdruck die Wahrscheinlichkeit $\mathsf{P}\big[\,x_t\geq a\,\big]$ gegeben ist. Damit können Sie dann die Formel (1) beweisen.

2.Aufgabe: Es sei $\{x_t\}_{t\geq 0}$ eine Brownsche Bewegung. Berechnen Sie folgende Wahrscheinlichkeiten:

a) $\lim_{t\to\infty} \mathsf{P}[\,x_t\leq a\,]$ für $a\in\mathbb{R}$.

b) $\lim_{t\to\infty} \mathsf{P}[\,x_t\leq \sigma\sqrt{t}\,]$ für $\sigma\in\mathbb{R}$.

c) $\lim_{t\to\infty} \mathsf{P}[\,x_t\leq ct\,]$ für $c\in\mathbb{R}$.

d) $\lim_{t\to\infty} \mathsf{P}\big[\max_{s\in[0,t]} x_s\leq a\,\big]$ für $a>0$.

e) $\lim_{t\to\infty} \mathsf{P}\big[\max_{s\in[0,t]} x_s\leq \sigma\sqrt{t}\,\big]$ für $\sigma>0$.

f) $\lim_{t\to\infty} \mathsf{P}\big[\max_{s\in[0,t]} x_s\leq ct\,\big]$ für $c>0$.

Sie können das Theorem 10.5 aus dem Skript benutzen.

..bitte wenden

3.Aufgabe: Es sei $\{x_t\}_{t\geq 0}$ eine Brownsche Bewegung. Berechnen Sie folgende Wahrscheinlichkeiten mit Hilfe des Theorems 10.5:

a) $\mathsf{P}\Big[\, x_T \leq 1 \,\wedge\, \max\limits_{t\in[0,T]} x_t \leq 2 \,\Big]$ für $T = 1$.

b) $\mathsf{P}\Big[\, x_T \leq 1 \,\wedge\, \max\limits_{t\in[0,T]} x_t \leq 2 \,\Big]$ für $T = 100$.

c) $\mathsf{P}\Big[\, x_T \geq -3 \,\wedge\, \min\limits_{t\in[0,T]} x_t \geq -6 \,\Big]$ für $T = 9$.