Hochschule RheinMain
Prof. Dr. D. Lehmann SS 2018

**2. Übungsblatt zur Vorlesung
Finanzmathematik II**

1.Aufgabe: Es sei $S_t = S_t^{(\mu)}$ ein 'real world' Preis-Prozess im Black-Scholes Modell gegeben durch die stochastische Differentialgleichung (SDE, **S**tochastic **D**ifferential **E**quation)

$$dS_t^{(\mu)}/S_t^{(\mu)} \;=\; \mu\,dt \;+\; \sigma\,dx_t \tag{1}$$

und $S_t^{(r)}$ sei der risikoneutrale Preis-Prozess, gegeben durch die SDE

$$dS_t^{(r)}/S_t^{(r)} \;=\; r\,dt \;+\; \sigma\,dx_t \tag{2}$$

Die Gleichungen (1) und (2) werden gelöst durch

$$\begin{aligned} S_t^{(\mu)} &= S_0^{(\mu)}\, e^{\sigma x_t + (\mu-\sigma^2/2)t} \\ S_t^{(r)} &= S_0^{(r)}\, e^{\sigma x_t + (r-\sigma^2/2)t} \end{aligned}$$

wobei $S_0^{(\mu)} = S_0^{(r)} = S_0$ durch den aktuellen, jetzt bekannten Preis des Basiswertes gegeben ist. Es sei $dW(\{x_t\}_{0<t\leq T})$ das Standard-Wiener-Maß und $d\tilde{W}(\{x_t\}_{0<t\leq T})$ das risikoneutrale Pricing-Maß, gegeben durch

$$d\tilde{W}(\{x_t\}_{0<t\leq T}) \;=\; \lim_{\Delta t\to 0} \prod_{k=1}^{T/\Delta t} \left\{ \tilde{p}(x_{t_{k-1}}, x_{t_k})dx_{t_k} \right\}$$

mit $t_k = k\Delta t$ und

$$\tilde{p}_t(x,y) \;=\; \tfrac{1}{\sqrt{2\pi t}}\, e^{-\frac{1}{2t}\left(x-y-\frac{\mu-r}{\sigma}t\right)^2} \;.$$

In der Vorlesung wurde bewiesen, dass

$$\mathsf{E}_{\tilde{W}}\big[\,H(S_{t_1}^{(\mu)},\dots,S_{t_m}^{(\mu)})\,\big] \;=\; \mathsf{E}_{W}\big[\,H(S_{t_1}^{(r)},\dots,S_{t_m}^{(r)})\,\big] \tag{3}$$

gilt für eine beliebige Funktion $H:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$. In dieser Aufgabe wollen wir die Formel (3) verifizieren, indem wir die linke und die rechte Seite von (3) explizit berechnen für die folgenden Fälle (a) und (b):

a) $H:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ mit $0<t<T$, $\alpha\in\mathbb{R}$ und

$$H(S_t) \;=\; S_t^{\alpha}$$

b) $H:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ mit $0<t_1<t_2<T$ und

$$H(S_{t_1},S_{t_2}) \;=\; \frac{S_{t_2}}{S_{t_1}}$$