

**12. Übungsblatt zur Vorlesung
Finanzmathematik II
(Probe-Klausur)**

Theorie-Teil:

1. Aufgabe (8 Punkte): Für einen Standard At The Money Call mit Laufzeiten T_i werden am Markt folgende implizite Volatilitäten beobachtet:

Laufzeit in Jahren:	0.25	0.5	1.0	2.0	4.0
implizite Volatilität:	28%	22%	18%	20%	20%

Kalibrieren Sie ein zeitabhängiges Black-Scholes Modell derart, so dass dieses die am Markt beobachteten impliziten Volatilitäten aus der obigen Tabelle reproduziert. Wählen Sie dazu eine stückweise konstante Funktion $t \rightarrow \sigma_t$ für die instantane Volatilität im BSTD Modell.

2. Aufgabe (8 Punkte): Es sei $\{x_t\}_{t \geq 0}$ eine Brownsche Bewegung. Berechnen Sie folgende Wahrscheinlichkeiten:

- a) $P\left[\max_{t \in [0, T]} x_t \leq 2\right]$ für $T = 4$.
- b) $P\left[x_T \leq 1 \wedge \max_{t \in [0, T]} x_t \leq 2\right]$ für $T = 4$.
- c) $P\left[x_T \leq 1 \wedge \max_{t \in [0, T]} x_t \geq 2\right]$ für $T = 4$.

3. Aufgabe (8 Punkte): Die Preisdynamik eines Underlyings $\{S_t\}_{t \geq 0}$ sei gegeben durch das zeitunabhängige Black-Scholes Modell $dS_t/S_t = \mu dt + \sigma dx_t$ mit $\sigma = 30\%$ und $\mu = 5\%$. Nehmen Sie an, dass die Zinsen null sind, $r = 0$. Der aktuelle Preis des Underlyings sei $S_0 = 100$. Betrachten Sie den Down-and-Out Barrier Call mit payoff

$$H_{\text{Down, Out}}(\{S_t\}_{0 \leq t \leq T}) = \max\{S_T - K, 0\} \times \chi\left(\min_{t \in [0, T]} S_t > B\right)$$

mit Laufzeit $T = 5$ Jahren und Parametern $K = 80$ und $B = 60$. Berechnen Sie den $t = 0$ Preis V_0 dieser Option.

4.Aufgabe (8 Punkte): Berechnen Sie den folgenden Erwartungswert bezüglich des Standard-Wienermaßes:

$$E_W \left[e^{-\int_0^4 \sigma_t dx_t} \right]$$

mit

$$\sigma_t := \begin{cases} 1 & \text{falls } t \in [1, 2] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und $\{x_t\}_{t \geq 0}$ eine Brownsche Bewegung.

5.Aufgabe (8 Punkte): Es seien ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 und ϕ_4 unabhängige, standard-normalverteilte Zufallszahlen. Konstruieren Sie aus diesen unabhängigen Zufallszahlen korrelierte, standard-normalverteilte Zufallszahlen ξ_1, ξ_2, ξ_3 und ξ_4 mit folgenden Korrelationen:

$$\text{Corr}[\xi_1, \xi_2] = 80\%$$

$$\text{Corr}[\xi_3, \xi_4] = 60\%$$

und $\text{Corr}[\xi_i, \xi_j] = 0$ für alle übrigen Korrelations-Paare $(i, j) \neq (1, 2), (3, 4)$.

Programmier-Teil:

6.Aufgabe (8 Punkte): Berechnen Sie das Integral

$$I := \int_0^1 \int_0^1 \frac{4xy}{x^2 + y^2} dx dy$$

numerisch mit Hilfe einer Monte Carlo Simulation in VBA. Wählen Sie dazu mindestens 10000 Zufallszahlen.

7.Aufgabe (12 Punkte): Wir betrachten $m = 2$ Underlyings, deren Risiko-neutrale Preisdynamik durch das zeitunabhängige Multi-Underlying Black-Scholes Modell gegeben ist:

$$dS_{1,t}/S_{1,t} = r dt + \sigma_1 dx_{1,t}$$

$$dS_{2,t}/S_{2,t} = r dt + \sigma_2 dx_{2,t}$$

mit korrelierten Brownschen Bewegungen

$$dx_{1,t} dx_{2,t} = \rho dt$$

Man kann zeigen, dass der Preis des relativen Outperformance-Calls H mit payoff

$$H(S_{1,T}, S_{2,T}) := \max \left\{ \frac{S_{1,T}}{S_{2,T}} - K, 0 \right\}$$

durch die Formel

$$V_0 = e^{-rT} [F N(d_1) - K N(d_2)] \quad (1)$$

gegeben ist mit

$$F = \frac{S_{1,0}}{S_{2,0}} e^{(\sigma_2^2 - \rho\sigma_1\sigma_2)T}$$

und

$$d_1 = \frac{\log\left[\frac{F}{K}\right] + \frac{\hat{\sigma}^2 T}{2}}{\hat{\sigma}\sqrt{T}},$$
$$d_2 = d_1 - \hat{\sigma}\sqrt{T},$$
$$\hat{\sigma} := \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2}.$$

Wählen Sie folgende Parameter-Werte (die Sie in VBA hard-coden können, Sie müssen sie nicht vom Excel-sheet einlesen):

$$\begin{aligned} S_{1,0} &= S_{2,0} = 100 \\ K &= 1 \\ T &= 4 \\ \sigma_1 &= 20\% \\ \sigma_2 &= 30\% \\ \rho &= -60\% \\ r &= 5\% \end{aligned}$$

- a) Implementieren Sie den analytischen Ausdruck auf der rechten Seite von Formel (1) und schreiben Sie diesen analytischen Preis in die Zelle B2.
- b) Berechnen Sie den Preis V_0 für dieselben Parameter-Werte mit Hilfe einer Monte-Carlo Simulation. Wählen Sie etwa 5000 Monte Carlo Pfade und 250 Zeitschritte pro Jahr. Schreiben Sie dann diesen Monte Carlo Preis in die Zelle B3.