Hochschule RheinMain SS 2018
Prof. Dr. D. Lehmann

11. Übungsblatt zur Vorlesung Finanzmathematik II

1.Aufgabe: Der Ornstein-Uhlenbeck-Prozess oder auch OU-Prozess ν_1, der Cox-Ingersoll-Ross-Prozess oder auch CIR-Prozess (oder auch square root oder SQR-Prozess in der ökonometrischen Literatur) ν_2 und der GARCH-Diffusion-Prozess ν_3 sind gegeben durch die stochastischen Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} d\nu_{1,t} &= \kappa_1(\bar{\nu}_1 - \nu_{1,t})\,dt \;+\; \beta_1\,dx_t \\ d\nu_{2,t} &= \kappa_2(\bar{\nu}_2 - \nu_{2,t})\,dt \;+\; \beta_2\sqrt{\nu_{2,t}}\,dx_t \\ d\nu_{3,t} &= \kappa_3(\bar{\nu}_3 - \nu_{3,t})\,dt \;+\; \beta_3\,\nu_{3,t}\,dx_t \end{aligned}$$

oder etwas kompakter

$$d\nu_t \;=\; \kappa(\bar{\nu} - \nu_t)\,dt \;+\; \beta\,\nu_t^\gamma\,dx_t$$

mit $\gamma \in \{0, 1/2, 1\}$. Es sei $E(t) := \mathsf{E}[\nu_t]$ der Erwartungswert von ν_t. Zeigen Sie:

a) $E(t)$ erfüllt die Differentialgleichung (für beliebiges γ)

$$E'(t) \;=\; \kappa\big(\bar{\nu} - E(t)\big)$$

b) Folgern Sie aus (a): Für den OU-, CIR- und GD-Prozess gilt:

$$E(t) \;=\; \bar{\nu} + (\nu_0 - \bar{\nu})\,e^{-\kappa t}\;.$$

2.Aufgabe: Der Varianz-Prozess ν_t im Heston-Modell ist gegeben durch den CIR-Prozess

$$d\nu_t \;=\; \kappa(\bar{\nu} - \nu_t)\,dt \;+\; \beta\sqrt{\nu_t}\,dy_t$$

mit y_t eine Brownschen Bewegung. Die instantane Volatilität ist dann gegeben durch

$$\sigma_t \;=\; \sqrt{\nu_t}$$

Leiten Sie die SDE für σ_t her. Das heisst, mit Hilfe des Ito-Lemmas, bestimmen Sie Funktionen $a = a(\sigma_t, t)$ und $b = b(\sigma_t, t)$, so dass

$$d\sigma_t \;=\; a(\sigma_t, t)\,dt + b(\sigma_t, t)\,dy_t$$

gilt. Überprüfen Sie Ihr Ergebnis mit Hilfe einer Excel-Simulation.

3.Aufgabe: Simulieren Sie die Prozesse $\nu_{1,t}, \nu_{2,t}$ und $\nu_{3,t}$ aus Aufgabe 1 mit Hilfe einer Excel-Simulation. Wählen Sie dazu etwa folgende Parameter-Werte:

$$\begin{aligned} \kappa_1 = \kappa_2 = \kappa_3 &= 3 \\ \bar\nu_1 = \bar\nu_2 = \bar\nu_3 &= 4\% \end{aligned}$$

und:

$$\begin{aligned} \beta_3 &= 2 \\ \beta_2 := \beta_3\sqrt{\bar\nu} &= 0.4 \\ \beta_1 := \beta_3\bar\nu &= 8\% \end{aligned}$$

mit den Start-Werten $\nu_{i,t=0} = \bar\nu = 4\%$. Variieren Sie dann insbesondere für den CIR-Prozess das β_2 und schauen Sie sich die Pfade für die beiden Fälle

$$\kappa_2\bar\nu_2 \;>\; \beta_2^2/2 \qquad \text{und} \qquad \kappa_2\bar\nu_2 \;<\; \beta_2^2/2$$

an. Als Motivation dazu könnten Sie sich das Theorem 21.2 aus dem Skript ansehen, insbesondere den Teil (b).

4.Aufgabe: Für $\gamma \in \{0, 1/2, 1\}$ sei ν_t wie in Aufgabe 1 gegeben durch

$$d\nu_t \;=\; \kappa(\bar\nu - \nu_t)\,dt \;+\; \beta\,\nu_t^\gamma\,dx_t$$

und $E(t) = \mathsf{E}[\nu_t]$ ist der Erwartungswert von ν_t gegeben durch die Formel aus Aufgabe 1b. Definieren wir

$$F(t) \;:=\; \mathsf{E}[\,\nu_t^2\,]\,,$$

dann ist die Varianz von ν_t gegeben durch

$$\mathsf{V}[\nu_t] \;=\; F(t) - E(t)^2\,.$$

a) Zeigen Sie mit Hilfe des Ito-Lemmas, dass ν_t^2 folgende SDE erfüllt:

$$d(\nu_t^2) \;=\; \big[2\kappa(\bar\nu\,\nu_t - \nu_t^2) + \beta^2\nu_t^{2\gamma}\big]dt \;+\; 2\beta\,\nu_t^{\gamma+1}\,dx_t \tag{1}$$

b) Folgern Sie mit Hilfe von (1): $F(t)$ erfüllt die folgenden Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned} \gamma = 0: &\qquad F'(t) + 2\kappa F(t) = 2\kappa\bar\nu\,E(t) + \beta^2 \\ \gamma = 1/2: &\qquad F'(t) + 2\kappa F(t) = 2\kappa\bar\nu\,E(t) + \beta^2\,E(t) \\ \gamma = 1: &\qquad F'(t) + 2\kappa F(t) = 2\kappa\bar\nu\,E(t) + \beta^2\,F(t) \end{aligned}$$

Diese DGLs lassen sich dann alle in geschlossener Form lösen. Im Limes $t \to \infty$ erhält man (müssen Sie nicht mehr zeigen, nur zur Info):

$$\gamma = 0: \qquad \lim_{t\to\infty} \mathsf{V}[\nu_t] = \frac{\beta^2}{2\kappa}$$

$$\gamma = 1/2: \qquad \lim_{t\to\infty} \mathsf{V}[\nu_t] = \frac{(\beta\sqrt{\bar\nu})^2}{2\kappa}$$

$$\gamma = 1: \qquad \lim_{t\to\infty} \mathsf{V}[\nu_t] = \begin{cases} \dfrac{(\beta\bar\nu)^2}{2\kappa - \beta^2} & \text{falls } \beta^2 < 2\kappa \\ +\infty & \text{falls } \beta^2 > 2\kappa \end{cases}$$