Hochschule RheinMain — SS 2018
Prof. Dr. D. Lehmann

1. Übungsblatt zur Vorlesung Finanzmathematik II

(Auffrischung Finanzmathematik I)

1.Aufgabe: Es sei $\{x_t\}_{t\geq 0}$ eine Brownsche Bewegung mit $x_0 = 0$ und $dW(\{x_t\}_{0<t\leq T})$ sei das Wiener-Maß. Weiter seien $\sigma \in \mathbb{R}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ zwei reelle Parameter.

a) Berechnen Sie den Erwartungswert $(T > t)$

$$\mathsf{E}[e^{\sigma x_t}] \;=\; \int e^{\sigma x_t}\, dW(\{x_t\}_{0<t\leq T})$$

b) Berechnen Sie den Erwartungswert $(T > t)$

$$\mathsf{E}[e^{\lambda x_t^2}] \;=\; \int e^{\lambda x_t^2}\, dW(\{x_t\}_{0<t\leq T})$$

Dieser Erwartungswert existiert nicht für alle $(\lambda, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$, welche (λ, t) sind erlaubt?

Schauen Sie sich dazu noch einmal das Theorem 4.1 aus dem Skript an.

2.Aufgabe: Gegeben sei eine Digital-Option mit Laufzeit $T > 0$ und Auszahlung

$$H(S_T) \;=\; \begin{cases} 100 & \text{falls } S_T \geq K \\ 0 & \text{falls } S_T < K \end{cases}$$

wobei der 'Strike' K eine positive Konstante ist, etwa $K = S_0$. Die Preisdynamik von $\{S_t\}_{t\geq 0}$ sei gegeben durch das Black-Scholes Modell

$$dS_t/S_t \;=\; \mu\, dt \;+\; \sigma\, dx_t\,. \tag{1}$$

Nehmen Sie an, dass die Zinsen null sind, $r = 0$.

a) Berechnen Sie den Preis V_t dieser Option zur Zeit $0 \leq t < T$ im Black-Scholes Modell. Hinweis: Im Ergebnis sollte die Funktion $N(d) = \int_{-\infty}^{d} e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}}$ vorkommen, aber keine weiteren Integrale.

b) Zeigen Sie, dass der Preis $V_t = V(S_t, t)$ aus Teil (a), aufgefasst als Funktion der 2 Variablen S_t und t, die Black-Scholes PDE mit Zinsen $r = 0$ erfüllt.

c) Berechnen Sie die replizierende Strategie für diese Option, d.h., berechnen Sie das $\delta = \delta(S_t, t)$ für diese Option.

..bitte wenden

d) Zeigen Sie, dass sich mit den δ_t's aus (c) und dem $t = 0$ Preis V_0 aus (a) tatsächlich die Options-Auszahlung replizieren lässt. Das heisst, zeigen Sie, dass die folgende Gleichung erfüllt ist:

$$V_0 \;+\; \int_0^T \delta(S_t, t)\, dS_t \;\;=\;\; H(S_T)$$

für jeden Black-Scholes Pfad $\{S_t\}_{t\geq 0}$, der durch die Black-Scholes SDE (1) (mit beliebigem Drift μ) gegeben ist. Wenden Sie dazu die Ito-Formel auf die Funktion $V_t = V(S_t, t)$ aus Teil (a) an.

e) Die Volatilität sei $\sigma = 20\%$ und der Strike sei $K = 100$. Skizzieren Sie den Preis und das delta zur Zeit $t = 0$ als Funktion von $S_0 \in (0, 200)$ für die Laufzeiten $T = 10$, $T = 1$ und $T = \frac{1}{10}$. Erstellen Sie dazu geeignete Diagramme in Excel.