Hochschule RheinMain
Prof. Dr. D. Lehmann SS 2018

# Lösungen 9. Übungsblatt Finanzmathematik II

**1.Aufgabe: a)** Wir haben

$$\mathsf{E}[\psi] \;=\; \sum_{i=1}^{n} a_i \,\mathsf{E}[\phi_i] \;=\; 0$$

und analog $\mathsf{E}[\xi] = 0$.

**b) und c)** Die Covariance ist bilinear, linear in beiden Argumenten. Also:

$$\begin{aligned} \mathsf{Cov}[\psi, \xi] &= \mathsf{Cov}\Big[ \sum_{i=1}^{n} a_i \phi_i \,,\, \sum_{j=1}^{n} b_j \phi_j \Big] \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} a_i b_j \,\mathsf{Cov}[\phi_i \phi_j] \end{aligned}$$

Wegen

$$\mathsf{Cov}[\phi_i \phi_j] \;=\; \mathsf{E}[\phi_i \phi_j] \;-\; \mathsf{E}[\phi_i]\,\mathsf{E}[\phi_j] \;=\; \mathsf{E}[\phi_i \phi_j] \;=\; \delta_{i,j}$$

bekommen wir also

$$\begin{aligned} \mathsf{Cov}[\psi, \xi] &= \sum_{i,j=1}^{n} a_i b_j \,\delta_{i,j} \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \;=\; \vec{a} \cdot \vec{b} \end{aligned}$$

und damit

$$\mathsf{V}[\psi] \;=\; \mathsf{Cov}[\psi, \psi] \;=\; \vec{a} \cdot \vec{a} \;=\; \|\vec{a}\|^2$$

und $\mathsf{V}[\xi] \;=\; \|\vec{b}\|^2$.

**d)** Die Korrelation ist dann gegeben durch

$$\mathsf{Corr}[\psi, \xi] \;=\; \frac{\mathsf{Cov}[\psi, \xi]}{\big\{ \mathsf{V}[\psi] \mathsf{V}[\xi] \big\}^{1/2}} \;=\; \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\| \, \|\vec{b}\|} \,.$$

**2.Aufgabe:** Wir haben

$$
\begin{aligned}
AA^T &= \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ 0 & a_{22} & a_{32} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_{11}^2 & * & * \\ a_{11}a_{21} & a_{21}^2 + a_{22}^2 & * \\ a_{31}a_{11} & a_{31}a_{21} + a_{32}a_{22} & a_{31}^2 + a_{32}^2 + a_{33}^2 \end{pmatrix} \\
&\stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 1 & \rho_{12} & \rho_{13} \\ \rho_{12} & 1 & \rho_{23} \\ \rho_{13} & \rho_{23} & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

also bekommen wir die Gleichungen

$$
\begin{aligned}
a_{11}^2 &= 1 \\
a_{11}a_{21} &= \rho_{12} \\
a_{21}^2 + a_{22}^2 &= 1 \\
a_{31}a_{11} &= \rho_{13} \\
a_{31}a_{21} + a_{32}a_{22} &= \rho_{23} \\
a_{31}^2 + a_{32}^2 + a_{33}^2 &= 1
\end{aligned}
$$

die wir nacheinander lösen können durch

$$
\begin{aligned}
a_{11} &= 1 \\
a_{21} &= \rho_{12} \\
a_{22} &= \sqrt{1 - \rho_{12}^2} \\
a_{31} &= \rho_{13} \\
a_{32}\sqrt{1 - \rho_{12}^2} &= \rho_{23} - \rho_{12}\rho_{13}
\end{aligned}
$$

also

$$
a_{32} = \frac{\rho_{23} - \rho_{12}\rho_{13}}{\sqrt{1 - \rho_{12}^2}}
$$

und schliesslich

$$
\begin{aligned}
a_{33}^2 &= 1 \; - \; \rho_{13}^2 \; - \; \frac{(\rho_{23} - \rho_{12}\rho_{13})^2}{1 - \rho_{12}^2} \\
&= \frac{1 - \rho_{12}^2 - \rho_{13}^2 + \rho_{12}^2\rho_{13}^2 - [\rho_{23}^2 - 2\rho_{12}\rho_{13}\rho_{23} + \rho_{12}^2\rho_{13}^2]}{1 - \rho_{12}^2} \\
&= \frac{1 - \rho_{12}^2 - \rho_{13}^2 - \rho_{23}^2 + 2\rho_{12}\rho_{13}\rho_{23}}{1 - \rho_{12}^2}
\end{aligned}
$$

und damit

$$
a_{33} = \left\{ \frac{1 - \rho_{12}^2 - \rho_{13}^2 - \rho_{23}^2 + 2\rho_{12}\rho_{13}\rho_{23}}{1 - \rho_{12}^2} \right\}^{1/2} .
$$

**3.Aufgabe:** siehe `Loesung10.xlsm`