Hochschule RheinMain SS 2018
Prof. Dr. D. Lehmann

Lösungen 8. Übungsblatt Finanzmathematik II

1.Aufgabe: **a)** Wir haben mit $F(y) = y^2$

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} F\big(\sigma_{\mathrm{imp},T}\sqrt{T}\,x\big)e^{-\frac{x^2}{2}}\,\tfrac{dx}{\sqrt{2\pi}} &= \int_{\mathbb{R}} \big(\sigma_{\mathrm{imp},T}\sqrt{T}\,x\big)^2 e^{-\frac{x^2}{2}}\,\tfrac{dx}{\sqrt{2\pi}} \\ &= \sigma_{\mathrm{imp},T}^2\,T\int_{\mathbb{R}} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}\,\tfrac{dx}{\sqrt{2\pi}} \\ &= \sigma_{\mathrm{imp},T}^2\,T \times 1 \\ &= \int_0^T \sigma_t^2\,dt\end{aligned}$$

b) Wir bekommen

$$\begin{aligned}\mathsf{E}_W\Big[\big(\textstyle\int_0^T \sigma_t\,dx_t\big)^2\Big] &= \mathsf{E}_W\Big[\textstyle\int_0^T \sigma_t\,dx_t \times \int_0^T \sigma_u\,dx_u\Big] \\ &= \lim_{\Delta t\to 0} \mathsf{E}_W\Big[\sum_{j=1}^{N_T}\sigma_{t_j}\sqrt{\Delta t}\,\phi_j \times \sum_{k=1}^{N_T}\sigma_{t_k}\sqrt{\Delta t}\,\phi_k\Big] \\ &= \lim_{\Delta t\to 0}\sum_{j=1}^{N_T}\sigma_{t_j}\sqrt{\Delta t}\ \sum_{k=1}^{N_T}\sigma_{t_k}\sqrt{\Delta t}\ \mathsf{E}_W[\,\phi_j\times\phi_k\,] \\ &= \lim_{\Delta t\to 0}\sum_{j,k=1}^{N_T}\sigma_{t_j}\sigma_{t_k}\Delta t\ \mathsf{E}_W[\,\phi_j\phi_k\,]\end{aligned}$$

Wegen

$$dW = \prod_{k=1}^{N_T} e^{-\frac{\phi_k^2}{2}}\,\tfrac{d\phi_k}{\sqrt{2\pi}}$$

haben wir für $j \neq k$

$$\begin{aligned}\mathsf{E}_W[\,\phi_j\phi_k\,] &= \int_{\mathbb{R}^{N_T}} \phi_j\phi_k \prod_{l=1}^{N_T} e^{-\frac{\phi_l^2}{2}}\,\tfrac{d\phi_l}{\sqrt{2\pi}} \\ &= \int_{\mathbb{R}^2}\phi_j\phi_k\,e^{-\frac{\phi_j^2}{2}}e^{-\frac{\phi_k^2}{2}}\,\tfrac{d\phi_j}{\sqrt{2\pi}}\tfrac{d\phi_k}{\sqrt{2\pi}} \\ &= \int_{\mathbb{R}}\phi_j\,e^{-\frac{\phi_j^2}{2}}\,\tfrac{d\phi_j}{\sqrt{2\pi}} \times \int_{\mathbb{R}}\phi_k\,e^{-\frac{\phi_k^2}{2}}\,\tfrac{d\phi_k}{\sqrt{2\pi}} \;=\; 0\end{aligned}$$

und für $j = k$

$$\begin{aligned} \mathsf{E}_W[\,\phi_j\phi_j\,] &= \int_{\mathbb{R}^{N_T}} \phi_j^2 \prod_{l=1}^{N_T} e^{-\frac{\phi_l^2}{2}} \frac{d\phi_l}{\sqrt{2\pi}} \\ &= \int_{\mathbb{R}} \phi_j^2\, e^{-\frac{\phi_j^2}{2}} \frac{d\phi_j}{\sqrt{2\pi}} \;=\; 1 \end{aligned}$$

so dass

$$\begin{aligned} \mathsf{E}_W\Big[\big(\textstyle\int_0^T \sigma_t\,dx_t\big)^2\Big] &= \lim_{\Delta t\to 0} \sum_{j,k=1}^{N_T} \sigma_{t_j}\sigma_{t_k} \Delta t\; \mathsf{E}_W[\,\phi_j\phi_k\,] \\ &= \lim_{\Delta t\to 0} \sum_{j=1}^{N_T} \sigma_{t_j}\sigma_{t_j}\, \Delta t \times 1 \\ &= \int_0^T \sigma_{t_j}^2\; dt \end{aligned}$$

c)] Analog zu (b) haben wir für beliebige Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \mathsf{E}_W\Big[\; \textstyle\int_0^T f(t)\,dx_t \times \int_0^T g(t)\,dx_t \;\Big] &= \lim_{\Delta t\to 0} \sum_{j,k=1}^{N_T} f(t_j)\,g(t_k)\,\Delta t\; \mathsf{E}_W[\,\phi_j\phi_k\,] \\ &= \lim_{\Delta t\to 0} \sum_{j=1}^{N_T} f(t_j)\,g(t_j)\,\Delta t\; \times 1 \\ &= \int_0^T f(t)g(t)\,dt\,. \end{aligned}$$

2.Aufgabe: Ein Put in 'absolute amount' mit payoff

$$H_{\text{put,abs}}(S_T) \;=\; \max\{K - S_T, 0\}$$

hat im zeitunabhängigen Black-Scholes Modell den Preis

$$V_{\text{put,abs}} \;=\; -S_0\,N(-d_+) + Ke^{-rT}N(-d_-)$$

mit

$$d_\pm \;=\; \frac{\log[S_0/K] + (r \pm \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

Der Payoff eines performance-type Puts ist gegeben durch

$$\begin{aligned} H_{\text{put,perf}}(S_T) &= \max\{k - S_T/S_0, 0\} \\ &= \tfrac{1}{S_0} \times \max\{kS_0 - S_T, 0\} \end{aligned}$$

Also haben wir

$$
\begin{aligned}
V_{\text{put,perf}} &= \tfrac{1}{S_0} \times \left[-S_0\, N(-d_+) \;+\; kS_0\, e^{-rT} N(-d_-) \right] \\
&= -\,N(-d_+) \;+\; k\, e^{-rT} N(-d_-)
\end{aligned}
$$

mit

$$
\begin{aligned}
d_\pm &= \frac{\log[S_0/(kS_0)] + (r \pm \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} \\
&= \frac{\log[1/k] + (r \pm \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}
\end{aligned}
$$

Da wir hier das zeitabhängige Black-Scholes Modell haben, müssen wir das σ durch die Volatilität

$$
\sigma_{\text{imp}} = \left\{ \tfrac{1}{T} \int_0^T \sigma_t^2\, dt \right\}^{1/2}
$$

ersetzen. Wir haben

$$
\begin{aligned}
\int_0^T \sigma_t^2\, dt &= (30\%)^2 \times 0.5 \;+\; (25\%)^2 \times (1-0.5) \;+\; (20\%)^2 \times (2-1) \\
&= 0.045 \;+\; 0.03125 \;+\; 0.04 \;=\; 0.11625
\end{aligned}
$$

und damit

$$
\sigma_{\text{imp}} = 24.11\%
$$

Also

$$
d_\pm = \frac{\log[1/80\%] + (3\% \pm (24.11\%)^2/2)2}{24.11\%\sqrt{2}}
$$

und damit

$$
\begin{aligned}
d_1 &= 1.001 \\
d_2 &= 0.660
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
N(-d_1) &= 0.1584 \\
N(-d_2) &= 0.2546
\end{aligned}
$$

und

$$
V_{\text{put,perf}} = -\,0.1584 \;+\; 0.8\, e^{-0.06} \times 0.2546 \;=\; 3.3414\%\,.
$$

3.Aufgabe: Wir wählen eine stückweise konstante instantane Volatilität σ_t mit:

$$
\sigma_t = \begin{cases} \sigma_1 & \text{falls } t \in [0, 0.25] \\ \sigma_2 & \text{falls } t \in (0.25, 0.5] \\ \sigma_3 & \text{falls } t \in (0.5, 1] \\ \sigma_4 & \text{falls } t \in (1, 2] \end{cases}
$$

und erhalten mit der Notation $t_0 := 0$ und

$$\{t_1, t_2, t_3, t_4\} \quad := \quad \{0.25, 0.5, 1, 2\}$$

$$t_i \sigma^2_{\text{imp}}(t_i) \quad = \quad \int_0^{t_i} \sigma_t^2 \, dt$$

woraus sich

$$\begin{aligned} t_i \sigma^2_{\text{imp}}(t_i) \; - \; t_{i-1} \sigma^2_{\text{imp}}(t_{i-1}) \quad &= \quad \int_{t_{i-1}}^{t_i} \sigma_t^2 \, dt \; = \; \sigma_i^2 \times (t_i - t_{i-1}) \\ \Leftrightarrow \qquad\qquad \sigma_i^2 \quad &= \quad \frac{t_i \sigma^2_{\text{imp}}(t_i) \; - \; t_{i-1} \sigma^2_{\text{imp}}(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}} \end{aligned}$$

ergibt. Also

$$\begin{aligned} \sigma_1^2 \quad &= \quad \frac{t_1 \sigma^2_{\text{imp}}(t_1) \; - \; 0}{t_1 - 0} \; = \; \sigma^2_{\text{imp}}(t_1) \\ \sigma_2^2 \quad &= \quad \frac{0.5 \times (21\%)^2 \; - \; 0.25 \times (25\%)^2}{0.5 - 0.25} \\ \sigma_3^2 \quad &= \quad \frac{1 \times (19\%)^2 \; - \; 0.5 \times (21\%)^2}{1 - 0.5} \\ \sigma_4^2 \quad &= \quad \frac{2 \times (20\%)^2 \; - \; 1 \times (19\%)^2}{2 - 1} \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned} \sigma_1 \quad &= \quad 25.00\% \\ \sigma_2 \quad &= \quad 16.03\% \\ \sigma_3 \quad &= \quad 16.76\% \\ \sigma_4 \quad &= \quad 20.95\% \, . \end{aligned}$$