Hochschule RheinMain
Prof. Dr. D. Lehmann SS 2018

Lösungen 4. Übungsblatt Finanzmathematik II

1.Aufgabe: Nach Theorem 11.1 ist der Zeit t Preis eines Barrier Down-and-Out Calls gegeben durch

$$V_{\text{Barrier}}(S_t,t) \;=\; V_{\text{Call},K}(S_t,t) - \bigl(\tfrac{S_t}{B}\bigr)^{1-\kappa} V_{\text{Call},K}\bigl(\tfrac{B^2}{S_t},t\bigr)$$

mit

$$\kappa \;=\; \frac{2r}{\sigma^2} \;\overset{r=0}{=}\; 0$$

und den Standard-Call-Preisen

$$\begin{aligned} V_{\text{Call},K}(S_t,t) &= S_t\,N(d_+) - Ke^{-r(T-t)}N(d_-) \\ V_{\text{Call},K}(B^2/S_t) &= B^2/S_t\,N(\tilde d_+) - Ke^{-r(T-t)}N(\tilde d_-) \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} d_\pm &= \frac{\log\bigl[\frac{S_t}{K}\bigr] + (r\pm\sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \\ \tilde d_\pm &= \frac{\log\bigl[\frac{B^2/S_t}{K}\bigr] + (r\pm\sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \end{aligned}$$

Für $r=0$ und $K=B$ erhält man also

$$\begin{aligned} V_{\text{Call},K}(S_t,t) &= S_t\,N(d_+) - BN(d_-) \\ V_{\text{Call},K}(B^2/S_t) &= B^2/S_t\,N(\tilde d_+) - BN(\tilde d_-) \end{aligned}$$

mit

$$d_\pm \;=\; \frac{\log\bigl[\frac{S_t}{B}\bigr] \pm \sigma^2(T-t)/2}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

und

$$\begin{aligned} \tilde d_\pm &= \frac{\log\bigl[B/S_t\bigr] \pm \sigma^2(T-t)/2}{\sigma\sqrt{T-t}} \\ &= \frac{-\log\bigl[S_t/B\bigr] \pm \sigma^2(T-t)/2}{\sigma\sqrt{T-t}} \\ &= -\,\frac{\log\bigl[S_t/B\bigr] \mp \sigma^2(T-t)/2}{\sigma\sqrt{T-t}}\;, \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} \tilde d_+ &= -d_- \\ \tilde d_- &= -d_+ \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned} V_{\text{Barrier}}(S_t,t) &= V_{\text{Call},K}(S_t,t) \;-\; \tfrac{S_t}{B} \times V_{\text{Call},K}\big(\tfrac{B^2}{S_t}\big) \\ &= S_t\,N(d_+) - BN(d_-) \;-\; \tfrac{S_t}{B} \times \big\{B^2/S_t\,N(\tilde d_+) - BN(\tilde d_-)\big\} \\ &= S_t\,N(d_+) - BN(d_-) \;-\; B\,N(\tilde d_+) + S_tN(\tilde d_-) \\ &= S_t\,N(d_+) - BN(d_-) \;-\; B\,N(-d_-) + S_tN(-d_+) \\ &= S_t\,\big[\underbrace{N(d_+) + N(-d_+)}_{=1}\big] \;-\; B\big[\underbrace{N(d_-) + N(-d_-)}_{=1}\big] \\ &= S_t \,-\, B \;=\; S_t \,-\, K\;. \end{aligned}$$

Der Payoff kann repliziert werden, wenn zur Zeit t genau

$$\delta_t \;=\; \frac{\partial V}{\partial S_t} \;=\; 1$$

Anteile vom Underlying gehalten werden, solange die Barriere noch nicht getroffen wurde. Wird die Barriere bei $t = t_{\text{barrier hit}}$ getroffen, ist die Position dann sofort zu schliessen, also $\delta_t = 0$ für alle $t \geq t_{\text{barrier hit}}$.

2.Aufgabe: b) Wir haben

$$\begin{aligned} H(\{S_t\}_{0\leq t\leq T}) &:= \begin{cases} \max\{\,(1+b)S_0\,,\,S_T\,\} & \text{falls } \min_{t\in[0,T]} S_t \geq B \\ S_T & \text{falls } \min_{t\in[0,T]} S_t < B \end{cases} \\ &= S_T \;+\; \begin{cases} \max\{\,(1+b)S_0 \,-\, S_T,\,0\,\} & \text{falls } \min_{t\in[0,T]} S_t \geq B \\ 0 & \text{falls } \min_{t\in[0,T]} S_t < B \end{cases} \\ &= S_T \;+\; \max\{\,(1+b)S_0 \,-\, S_T,\,0\,\} \times \chi\big(\min_{t\in[0,T]} S_t \geq B\big) \\ &= S_T \;+\; H_{\text{down-and-out-put}}(S_T) \end{aligned}$$

wobei der Payoff des Down-and-Out-Puts mit Strike K und Barrier B also gegeben ist durch

$$H_{\text{down-and-out-put}}(S_T) \;:=\; \max\{\,K \,-\, S_T,\,0\,\} \times \chi\big(\min_{t\in[0,T]} S_t \geq B\big)\;,$$

der Strike ist hier also

$$K \;=\; (1+b)S_0\;.$$

3.Aufgabe: Berechnen Sie mit einem Taschenrechner und der Tabelle für die $N(x)$-Funktion den Black-Scholes Preis eines Down-and-Out Barrier Calls mit folgenden Parametern:

$$\begin{aligned} \text{Laufzeit } T &= 1 \text{ Jahr} \\ \text{aktueller Preis des Underlyings } S_0 &= 100 \\ \text{Barriere } B &= 80 \\ \text{Strike } K &= 100 \\ \text{Zinsen } r &= 0 \\ \text{Volatilitaet } \sigma &= 30\% \end{aligned}$$

Um wieviel tut das Vorhandensein der Barriere den Preis verbilligen im Vergleich zu einem Standard-Call?

Mit der Formel aus Theorem 11.1:

$$V_{\text{Barrier}}(S_0, 0) = V_{\text{Call},K}(S_0, 0) - \left(\tfrac{S_0}{B}\right)^{1-\kappa} V_{\text{Call},K}\left(\tfrac{B^2}{S_0}, 0\right)$$

mit

$$\kappa = \frac{2r}{\sigma^2} \overset{r=0}{=} 0$$

und den Standard-Call-Preisen

$$\begin{aligned} V_{\text{Call},K}(S_0, 0) &= S_0\, N(d_+) - Ke^{-rT} N(d_-) \\ V_{\text{Call},K}(B^2/S_0, 0) &= B^2/S_0\, N(\tilde{d}_+) - Ke^{-rT} N(\tilde{d}_-) \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} d_\pm &= \frac{\log\left[\frac{S_0}{K}\right] + (r \pm \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} \\ \tilde{d}_\pm &= \frac{\log\left[\frac{B^2/S_0}{K}\right] + (r \pm \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} \end{aligned}$$

Für $r = 0$,

$$V_{\text{Barrier}}(S_0, 0) = V_{\text{Call},K}(S_0, 0) - \tfrac{S_0}{B} \times V_{\text{Call},K}\left(\tfrac{B^2}{S_0}, 0\right)$$

mit

$$\begin{aligned} V_{\text{Call},K}(S_0, 0) &= S_0\, N(d_+) - KN(d_-) \\ V_{\text{Call},K}(B^2/S_0) &= B^2/S_0\, N(\tilde{d}_+) - KN(\tilde{d}_-) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} d_\pm &= \frac{\log\left[\frac{S_0}{K}\right] \pm \sigma^2 T/2}{\sigma\sqrt{T}} \\ &= \frac{\log\left[\frac{100}{100}\right] \pm 0.045}{0.3} \\ &= \pm\, 0.15 \end{aligned}$$

und

$$
\begin{aligned}
\tilde{d}_\pm &= \frac{\log\left[\frac{B^2/S_0}{K}\right] \pm \sigma^2 T/2}{\sigma\sqrt{T}} \\
&= \frac{\log\left[0.64\right] \pm 0.045}{0.3} \\
&= \begin{cases} -1.3376 & \text{fuer } " + " \\ -1.6376 & \text{fuer } " - " \end{cases}
\end{aligned}
$$

Also

$$
\begin{aligned}
V_{\text{Call},K}(S_0, 0) &= S_0\, N(d_+) \, - \, K N(d_-) \\
&= 100\, N(0.15) \, - \, 100 N(-0.15) \\
&= 55.96 \, - \, 44.04 \, = \, 11.92
\end{aligned}
$$

und

$$
\begin{aligned}
\tfrac{S_0}{B} \times V_{\text{Call},K}\left(\tfrac{B^2}{S_0}, 0\right) &= \tfrac{S_0}{B} \times \left[B^2/S_0\, N(\tilde{d}_+) \, - \, K N(\tilde{d}_-)\right] \\
&= B\, N(\tilde{d}_+) \, - \, S_0 K/B N(\tilde{d}_-) \\
&= 80 \times 0.0905 \, - \, 125 \times 0.05075 \, = \, 0.8970
\end{aligned}
$$

Also insgesamt

$$
V_{\text{Barrier}}(S_0, 0) \, = \, 11.92 \, - \, 0.8970 \, = \, 11.03
$$

und das Vorhandensein der Barriere tut den Preis also nur um 0.8970 verbilligen.