

Lösungen 2. Übungsblatt Finanzmathematik II

1. Aufgabe: Wir berechnen zunächst die rechte Seite,

$$\mathbb{E}_W [H(S_{t_1}^{(r)}, \dots, S_{t_m}^{(r)})].$$

a) Wir haben

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_W [(S_t^{(r)})^\alpha] &= \int S_0^\alpha e^{\alpha\sigma x_t + \alpha(r-\sigma^2/2)t} dW(\{x_t\}) \\ &= \int_{\mathbb{R}} S_0^\alpha e^{\alpha\sigma x_t + \alpha(r-\sigma^2/2)t} e^{-\frac{x_t^2}{2t}} \frac{dx_t}{\sqrt{2\pi t}} \\ &= S_0^\alpha e^{\alpha(r-\sigma^2/2)t} \int_{\mathbb{R}} e^{\alpha\sigma\sqrt{t}y} e^{-\frac{y^2}{2}} \frac{dy}{\sqrt{2\pi}} \\ &= S_0^\alpha e^{\alpha(r-\sigma^2/2)t} e^{\frac{(\alpha\sigma\sqrt{t})^2}{2}} \\ &= S_0^\alpha e^{\alpha r t} e^{(\alpha^2 - \alpha)\sigma^2 t/2} \end{aligned} \tag{1}$$

und

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\tilde{W}} [(S_t^{(\mu)})^\alpha] &= \int S_0^\alpha e^{\alpha\sigma x_t + \alpha(\mu-\sigma^2/2)t} d\tilde{W}(\{x_t\}) \\ &= \int_{\mathbb{R}} S_0^\alpha e^{\alpha\sigma x_t + \alpha(\mu-\sigma^2/2)t} e^{-\frac{[0-x_t - \frac{\mu-r}{\sigma}t]^2}{2t}} \frac{dx_t}{\sqrt{2\pi t}} \\ &\stackrel{y=x_t + \frac{\mu-r}{\sigma}t}{=} \int_{\mathbb{R}} S_0^\alpha e^{\alpha\sigma[y - \frac{\mu-r}{\sigma}t] + \alpha(\mu-\sigma^2/2)t} e^{-\frac{y^2}{2t}} \frac{dy}{\sqrt{2\pi t}} \\ &= \int_{\mathbb{R}} S_0^\alpha e^{\alpha\sigma y} e^{-\alpha(\mu-r)t + \alpha(\mu-\sigma^2/2)t} e^{-\frac{y^2}{2t}} \frac{dy}{\sqrt{2\pi t}} \\ &= \int_{\mathbb{R}} S_0^\alpha e^{\alpha\sigma y} e^{\alpha(r-\sigma^2/2)t} e^{-\frac{y^2}{2t}} \frac{dy}{\sqrt{2\pi t}} \end{aligned}$$

und das ist identisch mit der zweiten Zeile von (1).

b) Wir haben

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_W [S_{t_2}^{(r)} / S_{t_1}^{(r)}] &= \int [S_0 e^{\sigma x_{t_2} + (r-\sigma^2/2)t_2}] / [S_0 e^{\sigma x_{t_1} + (r-\sigma^2/2)t_1}] dW(\{x_t\}) \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} e^{\sigma(x_{t_2} - x_{t_1}) + (r-\sigma^2/2)(t_2-t_1)} p_{t_1}(0, x_{t_1}) p_{t_2-t_1}(x_{t_1}, x_{t_2}) dx_{t_1} dx_{t_2} \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} e^{\sigma(x_{t_2} - x_{t_1}) + (r-\sigma^2/2)(t_2-t_1)} e^{-\frac{x_{t_1}^2}{2t_1}} e^{-\frac{(x_{t_1} - x_{t_2})^2}{2(t_2-t_1)}} \frac{dx_{t_1}}{\sqrt{2\pi t_1}} \frac{dx_{t_2}}{\sqrt{2\pi(t_2-t_1)}} \end{aligned} \tag{2}$$

Jetzt substituieren wir x_{t_2} durch $y := x_{t_2} - x_{t_1}$ und erhalten

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_W [S_{t_2}^{(r)} / S_{t_1}^{(r)}] &= \int_{\mathbb{R}^2} e^{\sigma y + (r - \sigma^2/2)(t_2 - t_1)} e^{-\frac{x_{t_1}^2}{2t_1}} e^{-\frac{y^2}{2(t_2 - t_1)}} \frac{dx_{t_1}}{\sqrt{2\pi t_1}} \frac{dy}{\sqrt{2\pi(t_2 - t_1)}} \\
&= \int_{\mathbb{R}} e^{\sigma y + (r - \sigma^2/2)(t_2 - t_1)} e^{-\frac{y^2}{2(t_2 - t_1)}} \frac{dy}{\sqrt{2\pi(t_2 - t_1)}} \\
&= e^{(r - \sigma^2/2)(t_2 - t_1)} \int_{\mathbb{R}} e^{\sigma \sqrt{t_2 - t_1} v} e^{-\frac{v^2}{2}} \frac{dv}{\sqrt{2\pi}} \\
&= e^{(r - \sigma^2/2)(t_2 - t_1)} e^{\sigma^2/2(t_2 - t_1)} \\
&= e^{r(t_2 - t_1)}
\end{aligned} \tag{3}$$

Schliesslich haben wir

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{\tilde{W}} [S_{t_2}^{(\mu)} / S_{t_1}^{(\mu)}] &= \int [S_0 e^{\sigma x_{t_2} + (\mu - \sigma^2/2)t_2}] / [S_0 e^{\sigma x_{t_1} + (\mu - \sigma^2/2)t_1}] dW(\{x_t\}) \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} e^{\sigma(x_{t_2} - x_{t_1}) + (\mu - \sigma^2/2)(t_2 - t_1)} \tilde{p}_{t_1}(0, x_{t_1}) \tilde{p}_{t_2 - t_1}(x_{t_1}, x_{t_2}) dx_{t_1} dx_{t_2} \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} e^{\sigma(x_{t_2} - x_{t_1}) + (\mu - \sigma^2/2)(t_2 - t_1)} e^{-\frac{[0 - x_{t_1} - \frac{\mu - r}{\sigma} t_1]^2}{2t_1}} e^{-\frac{[x_{t_1} - x_{t_2} - \frac{\mu - r}{\sigma}(t_2 - t_1)]^2}{2(t_2 - t_1)}} \frac{dx_{t_1}}{\sqrt{2\pi t_1}} \frac{dx_{t_2}}{\sqrt{2\pi(t_2 - t_1)}}
\end{aligned}$$

Wir substituieren wieder

$$\begin{aligned}
y_{t_1} &= x_{t_1} + \frac{\mu - r}{\sigma} t_1 \\
y_{t_2} &= x_{t_2} + \frac{\mu - r}{\sigma} t_2
\end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned}
\sigma y_{t_1} + r t_1 &= \sigma x_{t_1} + \mu t_1 \\
\sigma y_{t_2} + r t_2 &= \sigma x_{t_2} + \mu t_2
\end{aligned}$$

und erhalten

$$\mathbb{E}_{\tilde{W}} [S_{t_2}^{(\mu)} / S_{t_1}^{(\mu)}] = \int_{\mathbb{R}^2} e^{\sigma(y_{t_2} - y_{t_1}) + (r - \sigma^2/2)(t_2 - t_1)} e^{-\frac{y_{t_1}^2}{2t_1}} e^{-\frac{[y_{t_1} - y_{t_2}]^2}{2(t_2 - t_1)}} \frac{dy_{t_1}}{\sqrt{2\pi t_1}} \frac{dy_{t_2}}{\sqrt{2\pi(t_2 - t_1)}}$$

und das ist identisch mit der letzten Zeile von (2).