Hochschule RheinMain
Prof. Dr. D. Lehmann SS 2018

Lösungen 11. Übungsblatt Finanzmathematik II

1.Aufgabe: Wir haben

$$d\nu_t \;=\; \kappa(\bar\nu - \nu_t)\,dt \;+\; \beta\,\nu_t^\gamma\,dx_t$$

mit $\gamma \in \{0, 1/2, 1\}$. Wegen

$$\mathsf{E}[dx_t] \;=\; 0$$

und allgemeiner

$$\mathsf{E}\Big[f\big(\{x_s\}_{0\le s\le t}\big)\,dx_t\Big] \;=\; 0$$

haben wir auch

$$\mathsf{E}[\nu_t^\gamma\,dx_t] \;=\; 0\,.$$

Damit erhalten wir

$$\mathsf{E}[d\nu_t] \;=\; \mathsf{E}\Big[\;\kappa(\bar\nu - \nu_t)\,dt \;+\; \beta\,\nu_t^\gamma\,dx_t\;\Big]$$

oder

$$d\mathsf{E}[\nu_t] \;=\; \kappa(\bar\nu - \mathsf{E}[\nu_t])\,dt$$

und damit

$$E'(t) \;=\; d\mathsf{E}[\nu_t]/dt \;=\; \kappa(\bar\nu - \mathsf{E}[\nu_t)] \;=\; \kappa\big(\bar\nu - E(t)\big)$$

Diese DGL können wir direkt lösen:

$$\int \frac{dE}{\bar\nu - E} \;=\; \int \kappa\,dt$$

also

$$\begin{aligned} -\log[\bar\nu - E] &= \kappa t + c \\ \bar\nu - E &= C\,e^{-\kappa t} \\ E &= \bar\nu \,-\, C\,e^{-\kappa t} \end{aligned}$$

Wegen

$$E(t=0) \;=\; \mathsf{E}[\nu_0] \;=\; \nu_0 \;=\; \bar\nu \,-\, C$$

oder

$$C \;=\; \bar\nu - \nu_0$$

bekommen wir also

$$\begin{aligned} E(t) &= \bar\nu + (\nu_0 - \bar\nu)\, e^{-\kappa t} \\ &= \bar\nu[1 - e^{-\kappa t}] + \nu_0\, e^{-\kappa t} \;. \end{aligned}$$

2.Aufgabe: Mit dem Ito-Lemma erhalten wir:

$$\begin{aligned} d\sqrt{\nu_t} &= \frac{1}{2\sqrt{\nu_t}}\, d\nu_t + \frac{1}{2} \times \frac{-1}{4\sqrt{\nu_t}^3} \times (d\nu_t)^2 \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\nu_t}} \left[\kappa(\bar\nu - \nu_t)\, dt + \beta\sqrt{\nu_t}\, dy_t\right] - \frac{1}{8\sqrt{\nu_t}^3}\, \beta^2 \nu_t\, dt \\ &= \frac{\kappa}{2}\left(\frac{\bar\sigma^2}{\sigma_t} - \sigma_t\right) dt + \frac{\beta}{2}\, dy_t - \frac{\beta^2}{8\sigma_t}\, dt \\ &= \frac{\kappa}{2}\left(\frac{\bar\sigma^2 - \beta^2/(4\kappa)}{\sigma_t} - \sigma_t\right) dt + \frac{\beta}{2}\, dy_t \;. \end{aligned}$$

Also:

$$\begin{aligned} a(\sigma_t, t) &= \frac{\kappa}{2}\left(\frac{\bar\sigma^2 - \beta^2/(4\kappa)}{\sigma_t} - \sigma_t\right) \;, \\ b(\sigma_t, t) &= \frac{\beta}{2} \;. \end{aligned}$$

4.Aufgabe: Mit dem Ito-Lemma bekommen wir

$$\begin{aligned} d(\nu_t^2) &= 2\nu_t\, d\nu_t + \frac{1}{2} \times 2 \times (d\nu_t)^2 \\ &= 2\nu_t\Big[\kappa(\bar\nu - \nu_t)\, dt + \beta\, \nu_t^\gamma\, dx_t\Big] + \big(\beta\, \nu_t^\gamma\, dx_t\big)^2 \\ &= 2\kappa(\bar\nu\, \nu_t - \nu_t^2)\, dt + 2\beta\, \nu_t^{\gamma+1}\, dx_t + \beta^2\, \nu_t^{2\gamma}\, dt \\ &= \left[2\kappa(\bar\nu\, \nu_t - \nu_t^2) + \beta^2 \nu_t^{2\gamma}\right] dt + 2\beta\, \nu_t^{\gamma+1}\, dx_t \end{aligned}$$

Wegen

$$\mathsf{E}\left[\nu_t^{\gamma+1}\, dx_t\right] \;=\; 0$$

erhalten wir daraus

$$\begin{aligned} d\mathsf{E}[\nu_t^2] \;=\; \mathsf{E}[d\nu_t^2] &= \mathsf{E}\Big[\left[2\kappa(\bar\nu\, \nu_t - \nu_t^2) + \beta^2 \nu_t^{2\gamma}\right] dt + 2\beta\, \nu_t^{\gamma+1}\, dx_t\Big] \\ &= 2\kappa(\bar\nu\, \mathsf{E}[\nu_t] - \mathsf{E}[\nu_t^2])\, dt + \beta^2 \mathsf{E}[\nu_t^{2\gamma}]\, dt \end{aligned}$$

oder

$$dF/dt \;=\; 2\kappa(\bar\nu\,E - F) \;+\; \beta^2 \times \begin{cases} \mathsf{E}[1] & \text{falls } \gamma = 0 \\ \mathsf{E}[\nu_t] & \text{falls } \gamma = 1/2 \\ \mathsf{E}[\nu_t^2] & \text{falls } \gamma = 1 \end{cases}$$

was äquivalent ist zu

$$F'(t) + 2\kappa F(t) \;=\; 2\kappa\bar\nu\,E(t) + \beta^2 \times \begin{cases} 1 & \text{falls } \gamma = 0 \\ E & \text{falls } \gamma = 1/2 \\ F & \text{falls } \gamma = 1 \end{cases}\;.$$