

8. Übungsblatt zur Vorlesung Finanzmathematik II

1. Aufgabe: In der Vorlesung haben wir im Teil (a) des Theorems 13.5 die folgende Formel bewiesen:

$$\mathbb{E}_W \left[F \left(\int_0^T \sigma_t dx_t \right) \right] = \int_{\mathbb{R}} F(\sigma_{\text{imp},T} \sqrt{T} x) e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} \quad (1)$$

mit

$$\sigma_{\text{imp},T} := \left\{ \frac{1}{T} \int_0^T \sigma_t^2 dt \right\}^{1/2}$$

Wir wollen die Formel (1) für den Fall $F(y) := y^2$ betrachten.

- a) Vereinfachen Sie die rechte Seite von (1) soweit wie möglich für den Fall $F(y) = y^2$.
- b) Berechnen Sie die linke Seite von (1) direkt mit Hilfe der Diskretisierung ($N_T = T/\Delta t$)

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_W \left[\left(\int_0^T \sigma_t dx_t \right)^2 \right] &= \mathbb{E}_W \left[\int_0^T \sigma_t dx_t \times \int_0^T \sigma_u dx_u \right] \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \mathbb{E}_W \left[\sum_{j=1}^{N_T} \sigma_{t_j} \sqrt{\Delta t} \phi_j \times \sum_{k=1}^{N_T} \sigma_{t_k} \sqrt{\Delta t} \phi_k \right] \end{aligned}$$

und erinnern Sie sich daran, wie das Wiener-Maß in den ϕ -Variablen aussah. Ihr Ergebnis sollte mit dem aus Teil (a) übereinstimmen.

- c) Beweisen Sie jetzt die Ito-Isometrie: Für beliebige Funktionen $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gilt

$$\mathbb{E}_W \left[\int_0^T f(t) dx_t \times \int_0^T g(t) dx_t \right] = \int_0^T f(t)g(t) dt$$

Gehen Sie dazu analog zu Teil (b) vor.

2. Aufgabe: Ein Underlying S_t wurde an das zeitabhängige Black-Scholes Modell kalibriert und es wurden folgende instantane Volatilitäten gefunden (die Zeiten sind in Jahren angegeben):

$$\sigma_t = \begin{cases} 30\% & \text{für } t \in [0, 0.5] \\ 25\% & \text{für } t \in (0.5, 1] \\ 20\% & \text{für } t \in (1, 2] \end{cases}$$

..bitte wenden

Der jährliche Zinssatz r betrage $r = 3\%$. Berechnen Sie den Preis V_0 des ‘performance-type’ Puts mit payoff

$$H(S_T) = \max\{80\% - S_T/S_0, 0\}$$

mit Laufzeit $T = 2$ Jahren im zeitabhängigen Black-Scholes Modell.